

Übungen Optimierung bei Differentialgleichungen

Blatt 1 (Abgabe: 01. Nov. 2006)

Aufgabe 1:

Man zeige, daß

$$y(t) = G(t) \left[y_0 + \int_{t_0}^t G(s)^{-1} b(s) ds \right], \quad y(t) \in \mathbb{R}^n$$

Lösung der inhomogenen linearen Anfangswertaufgabe

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

ist. Hierbei ist $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Lösung des AWP

$$\dot{G}(t) = A(t)G(t), \quad G(t_0) = I$$

Aufgabe 2: (Das springende Pendel, Teil 1)

Ein gedämpftes Pendel mit vollkommen elastischem Anstoß an seitlicher Wand wird beschrieben durch das AWP:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -g \sin(y_1) - cy_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Sprungbedingung

$$\begin{pmatrix} y_1(t_s^+) \\ y_2(t_s^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t_s^-) \\ y_2(t_s^-) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2y_2(t_s^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t_s^-) \\ -y_2(t_s^-) \end{pmatrix}$$

an Zeitpunkten t_s definiert durch

$$y_1(t_s) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{d.h. } q(t_s, y(\dots)) = y_1(t_s) - \frac{\pi}{4}$$

Teil a) Wählen Sie Dämpfungsparameter $c = 0,25$ und Gravitationskonstante $g = 9,81$. Verwenden Sie z.B. den Matlab-Integrator ode45 mit der events-Option zur Simulation des gedämpften Pendels (Plot).

Teil b) Formulieren Sie die Aussage des Satzes über die Wronski-Matrix bei Sprungbedingungen für den obigen Fall des gedämpften Pendels.

Teil c) Erweitern Sie die Simulation aus a) gemäß der Herleitung aus b), so daß die Wronski-Matrix

$$\frac{\partial y(t)}{\partial y_0}$$

simultan mitberechnet wird.