Prof. Dr. V. Schulz Wintersemester 2004/2005

Übungen Optimierung bei Differentialgleichungen

Blatt 6 (nur Extrapunkte)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie Standardproblem 5 mit Dirichlet-Randsteuerung auf Teilrand Γ_1, d.h.

$$\min \frac{1}{2} \| y - z \|_Q^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_Q^2$$

$$\begin{array}{llll} \text{unter} & -\frac{\partial y}{\partial t} + \Delta y = 0 & \text{in} & Q \\ & y(x,0) = y_0 & \text{in} & \Omega \times \{0\} \\ & y(x,t) = u(x,t) & \text{auf} & \Sigma_1 := \Gamma_1 \times [0,T] \\ & y(x,t) = 0 & \text{auf} & \Sigma_2 := (\partial\Omega \setminus \Gamma_2) \times [0,T] \end{array}$$

und leiten Sie notwendige Bedingungen her

Aufgabe 2: Das Gebiet Ω soll durch die 4 Ränder

$\Gamma_1 = \{0\} \times [0,1], \Gamma_2 = [0,1] \times \{0\}, \Gamma_3 = \{1\} \times [0,1]$ und

$\Gamma_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \phi(x_1) \end{pmatrix} \middle| x_1 \in [0,1], \phi(0) = 1 = \phi(1) \right\}$ umschrieben werden.

Es gilt das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ y(x) &= 1 \quad , x \in \Gamma_1 \\ y(x) &= 0 \quad , x \in \Gamma_3 \\ \frac{\partial y}{\partial \vec{n}}(x) &= 0 \quad , x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \end{aligned}$$

Versuchen Sie, eine Gebietstransformation $\Omega \to \tilde{\Omega}$ zu finden, so dass das Optimierungsproblem (für gegebenes $\gamma(s)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\min \int_{\Gamma_4} \frac{1}{2} \big(y(s) - \gamma(s)\big)^2 ds + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \phi(s)^2 ds$$

behandelbar wird.

Können Sie notwendige Bedingungen angeben?