V. Schulz
M. Klar

WS 2017/18
Abgabe: 02.11.17, bis 09:30 Uhr

Optimierung bei Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Aufgabe 4 : (6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^{n_y \times n_u} \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^{n_y \times n_u} \to \mathbb{R}^{n_f}$ differenzierbar und $\frac{\partial c}{\partial y}$ sei invertierbar. Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{(y,u)\in\mathbb{R}^{n_y\times n_u}} & f(y,u) \\ \text{s.t. } & c(y,u) = 0. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass sich das Problem in ein äquivalentes Problem der Form

$$\min_{u\in\mathbb{R}^{n_u}} \hat{f}(u) := f(y(u), u)$$

umschreiben lässt.

(ii) Zeigen Sie, dass für das umformulierte Problem gilt:

$$\nabla \hat{f}^\top = -\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}$$

(iii) Seien $A \in \mathbb{R}^{n_y\times n_u}, B \in \mathbb{R}^{n_r\times n_y}$ und $C \in \mathbb{R}^{n_r\times n_u}$. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an A, B und C sind obige Überlegungen auf das Problem

$$\begin{aligned} \min_{(y,u)\in\mathbb{R}^{n_y\times n_u}} & y^\top A u \\ \text{s.t. } & By = Cu. \end{aligned}$$

anwendbar? Skizzieren Sie ein Gradientenabstiegsverfahren, das auf obigen Überlegungen basiert und auf die explizite Invertierung von Matrizen in jeder Iteration verzichtet.