Prof. Dr. V. Schulz / Dr. S.B. Hazra　　　　Sommersemester 2004

Übungen Numerik III

Blatt 1

Aufgabe 1: Sei X Vektorraum und $f : X \to \mathbb{R}$ konvex, d.h.

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t) \cdot f(x) + t \cdot f(y), \quad \forall x, y \in X \quad \forall t \in [0,1]$$

Zeigen Sie, dass die Menge der globalen Minima eine konvexe Menge sein muss und folgern Sie, dass somit alle lokalen Minima auch globale sind.

Aufgabe 2: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit. Betrachten Sie die Funktion:

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} x^\top A x \end{array}$$

a) Berechnen Sie bezüglich der Euklidischen Metrik

$$\nabla_x f(x) \text{ und } Hess_x f(x)$$

b) Betrachten Sie einen Koordinatenwechsel ("Skalierung") der Form

$$x = Sy \text{ mit } S \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ und } \tilde{f}(y) := f(Sy)$$

Zeigen Sie allgemein $\nabla_y \tilde{f}(y) = S^\top \nabla_x f(x)$, $Hess_y \tilde{f}(y) = S^\top Hess_x f(x) S$
und somit hier $\nabla_y \tilde{f}(y) = S^\top A S y$, $Hess_y \tilde{f}(y) = S^\top A S$

(beides wieder bezüglich der Euklidischen Metrik in der y-Variablen)

c) Zeigen Sie: Wenn wir den Basiswechsel wieder rückgängig machen erhalten wir

$$y \mapsto S^\top A S y \quad \Longleftrightarrow \quad x \mapsto S\,S^\top A x$$

folgern Sie daraus, dass die Berechnung von ∇f und $Hess f$ in der Metrik $(u, v) = u^\top A v$ einer Skalierung der Variablen mit $S = A^{-1/2}$ entspricht und $Hess_y f(y) = I$ gilt.

Aufgabe 3: Betrachten Sie das Beispiel

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\top A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Malen Sie im x-Koordinatensystem Höhenlinien durch $(1, 0)$ und $(2, 0)$ und exemplarische Gradienten bezüglich der Euklidischen Metrik.

b) Zeigen Sie für $x = A^{-1/2}\, y$, dass (entsprechend der Notation in Aufgabe 2b) $\tilde{f}(y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ und malen Sie im y-Koordinatensystem entsprechende Höhenlinien durch $(1, 0)$ und $(2, 0)$ und exemplarische Gradienten bezüglich der Euklidischen Metrik.

Aufgabe 4: (Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung)

$$\text{für } X = \left\{ x \in C^1[0, 1] \,\middle|\, x(0) = \xi_1, x(1) = \xi_2 \right\}$$

betrachten Sie die Zielfunktion

$$f(x) = \int_0^1 L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) dt\ , \quad L \text{ differenzierbar nach beiden Argumenten}$$

Zeigen Sie in der Standardmetrik $(u, v) := \int_0^1 u(t)v(t)dt$

$$\nabla_x f(x) = \left[t \mapsto \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) (t) \right]$$

Wenn wir später wissen, dass für Optimalität $\nabla_x f = 0$ gelten muss, sind damit die "Euler-Lagrange"-Gleichungen bewiesen $\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \right)$

(Hinweis: betrachten Sie Variationen

$$h \in C_0^1[0, 1] := \left\{ x \in C^1[0, 1] \,\middle|\, x(0) = 0 = x(1) \right\}$$

und werten Sie

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_0^1 L\big(x(t) + h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)\big)\, dt$$

mit partieller Integration aus)