

Übungen Numerik II

Blatt 9

Aufgabe 1: Betrachten Sie für $\Omega = (0, 1)$ das

$$\begin{aligned} \text{Randwertproblem } \Delta u(x) &= u_{xx}(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad f \in C^2(\Omega) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

und die Finite-Differenzen-Diskretisierung

$$(\Delta_h u)_i = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1$$

mit $u_i := u(i \cdot h)$, was auf die System-Matrix

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

auf dem Gitter $0, h, 2h, \dots, N \cdot h$, $h := \frac{1}{N}$, führt. ($N+1$ sei gerade)

Sei u die Lösung des RWP und u^h Lösung des diskretisierten Problems:

- a) Bezeichne für $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Notation $\tilde{y} := (y(0), y(h), y(2h), \dots, y(N \cdot h))^T$ die Auswertung einer beliebigen Funktion auf dem Gitter.

Zeigen Sie: $(\Delta_h u^h)_i = \Delta u(i \cdot h)$

- b) Zeigen Sie $\tilde{u} - u_h = A_h^{-1}(A_h \tilde{u} - \tilde{\Delta} u)$

- c) Betrachten Sie für eine Gitterfunktion $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ die Norm

$$|z|_2 := \left(\frac{h}{3} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \text{mod } 2=1}}^{N-1} 4z_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ \text{mod } 2=0}}^{N-1} 2z_i^2 \right) \right)^{1/2}$$

und zeigen Sie für eine Abbildung $y : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, y(0) = y(1) = 0$ die Eigenschaft $\|y\|_2 = \|\tilde{y}\|_2 + \mathcal{O}(h^2)$ (Simpsonregel)

und für $u : |A_h \tilde{u} - \widetilde{\Delta}u|_2 \leq C h^2$ mit C unabhängig von h

d) Folgern Sie mit den Aussagen aus Kapitel 3 über A_h , dass gilt

$$\|\tilde{u} - u^h\|_2 = \mathcal{O}(h^2)$$

Aufgabe 2: Lösen Sie in $\Omega = (0, 1)$ mittels Finiter Differenzen das RWP

$$\begin{aligned}\Delta u &= 1 \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0\end{aligned}$$