Prof. Dr. V. Schulz / Dr. S.B. Hazra — Sommersemester 2003

Übungen Numerik I

Blatt 7

Aufgabe 1: Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\| A\|_2 = \max \{ \sigma_i \mid \sigma_i^2 \text{ Eigenwert von } A^\top A, i = 1, \dots n\}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie für $A \in GL(n)$ eine LR-Zerlegung, wobei L auf der Diagonale nur 1-Einträge besitzt (vgl. LA I)

Zeigen Sie, dass es $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ gibt mit $d_i \neq 0,\ \forall i$ und $\tilde{R}$ mit 1-Einträgen auf der Diagonalen, sodass gilt

$$A = LD\tilde{R}$$

Aufgabe 3: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definiert zeigen Sie, dass es L und D wie oben gibt, mit zusätzlich $d_i > 0\ \forall i$, so dass gilt

$$A = LDL^\top \text{ (Cholesky-Zerlegung)}$$

Aufgabe 4:* Betrachten Sie folgendes GLS für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x_0 = 1$$

$$\frac{1}{h^2}(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$x_{n+1} = 0$$

a) Stellen Sie für die Variablen $x_1, \dots, x_n$ das Gleichungssystem in Fall $n = 10$ in Matrix-Vektorschreibweise auf , $Ax = b$.

Definieren Sie die Diagonalmatrix D als die Diagonale von A und betrachten Sie die Iteration

$$x^{k+1} = x^k - D^{-1}(Ax^k - b) \quad , x^k \in \mathbb{R}^n$$

Führen Sie die Iteration mit Startwert

$$x^0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n+1}\ \frac{\pi}{4}\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{n}{n+1}\ \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \text{ für}$$

$n = 10, n = 100, n = 1000$ durch und beobachten Sie das Konvergenzverhalten, indem Sie x^k jeweils als Plot (x_i^k, i) darstellen.

b) Lösen Sie das GLS in Form von "`A\b`" in Matlab und vergleichen Sie Rechenzeiten mit a).