

Übungen Numerik IBlatt 5Aufgabe 1:

Sei $f \in C^2[a, b]$ und $p(x) := \alpha + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $p(a) = f(a), p(b) = f(b)$. Zeigen Sie:

$$\|f(x) - p(x)\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Aufgabe 2:

- Berechnen Sie den Umfang des Viertel-Einheitskreises als die Bogenlänge der Kurve $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Können Sie andere Darstellungen der Kurve angeben?
- Wie lang ist der *Bogen* $\{(x, x^2), x \in [0, 1]\}$?

Aufgabe 3:

Benutzen Sie das Verfahren nach Gram-Schmidt, um aus den Polynomen $1, x, x^2, x^3$ eine orthonormale Basis zu erzeugen: Intervall $I = [-1, 1]$ und Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie Koeffizienten der Newton-Cotes-Formel bei äquidistanten Stützstellen x_0, x_1, x_2 , und x_3 (Pulcherrima).