

Übungen Numerik I

Blatt 2

Aufgabe 1: Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \ni x &\mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \ni y &\mapsto x = f^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Konditionsmatrizen K bzw. $K^{(-1)}$ gilt $K \cdot K^{(-1)} = I$

(Tipp: $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^{-1}}{\partial x} = I$)

Aufgabe 2: Betrachten Sie für $y, p, q \in \mathbb{R}, q \neq 0$ die quadratische Gleichung

$$y^2 - py + q = 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsformel

$$y_{1,2}(p, q) = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

schlecht konditioniert ist, falls $\frac{y_1}{y_2} \approx 1$

(Hinweis: folgern Sie z.B. $\frac{\partial y_1}{\partial p} = \frac{y_1}{y_2 - y_1}$ und $\frac{\partial y_1}{\partial q} = \frac{1}{y_1 - y_2}$ aus den Eigenschaften $p = y_1 + y_2, q = y_1 \cdot y_2$)

b) Berechnen Sie die Kondition für $p = 4, q = 3.999$

Aufgabe 3: Sei in Aufgabe 2 nun $\left| \frac{y_1}{y_2} \right| \gg 1$, d.h. $q \ll p^2/4$ und $p < 0$. Zur Vermeidung von Auslöschung werde zunächst

$$y_2 = p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}$$

berechnet. Die andere Wurzel werde auf zwei Varianten berechnet ($w = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$)

Variante A	Variante B
$y_1 = \frac{p}{2} + w$	$y_1 = \frac{q}{y_2}$ (wegen $q = y_1 y_2$)

Zeigen Sie, dass Variante B stabiler ist als Variante A.

Aufgabe 4:* Programmieren Sie das Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen und suchen Sie nach einem Beispiel zur Demonstration seiner überlegenen Stabilitätseigenschaften gegenüber einer naiven Rechenvorschrift.

INPUT: Anzahl Koeffizienten n , Koeffizienten α_i , Stelle x

OUTPUT: Wert von $y = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$