Aufgabenstellung:

Betrachten Sie
$$I := \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$$
Berechnen Sie das Integral numerisch mit Hilfe von

$a)$ n Gaußpunkten, $n = 1, 2$

$b)$ den Punkten $\{\frac{i}{n+1} \mid i = 1, \ldots, n\}, n = 2, 3$

$c)$ Berechnen Sie in beiden Fällen den Fehler

Lösung:

$a)$ Zunächst werden die Gaußpunkte im Intervall $[0, 1]$ bestimmt, indem die Orthogonalpolynome $p_k(x)$ aufgestellt und deren Nullstellen berechnet werden.
(Für die Gewichtsfunktion gilt: $\omega(x) \equiv 1$, weiter ist formal $p_{-1}(x) \equiv 0$)

$$\begin{aligned}
\underline{k=0:} \quad & p_0(x) & \equiv\ & 1 \\
\underline{k=1:} \quad & p_1(x) & =\ & \big(x-\beta_1)p_0(x) - \gamma_1^2 p_{-1}(x)\big) \\
& & =\ & \left(x - \frac{< xp_0, p_0 >}{< p_0, p_0 >}\right) \\
& & =\ & x - \frac{1}{2} \\
\underline{k=2:} \quad & p_2(x) & =\ & (x-\beta_2)p_1(x) - \gamma_2^2 p_0(x) \\
& & =\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12} \\
& & =\ & x^2 - x + \frac{1}{6} \\
\underline{k=3:} \quad & p_3(x) & =\ & (x-\beta_3)p_2(x) - \gamma_3^2 p_1(x) \\
& & =\ & \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{15}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
& & =\ & x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Nullstellen von $p_2(x)$:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} \qquad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Nullstellen von $p_3(x)$:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}} \qquad x_2 = \frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}$$

Zur Berechnung von $\beta_2, \beta_3, \gamma_2^2, \gamma_3^2$:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{< xp_1, p_1 >}{< p_1, p_1 >} \\
&= \frac{\int_0^1 x(x-1/2)^2 dx}{\int_0^1 (x-1/2)^2 dx} \\
&= \frac{\int_0^1 x^3 - x^2 + x/4 \, dx}{\int_0^1 (x^2 - x + 1/4) dx} \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^2 &= \frac{< p_1, p_1 >}{< p_0, p_0 >} \\
&= 1/12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{< xp_2, p_2 >}{< p_2, p_2 >} \\
&= \frac{\int_0^1 x(x^2 - x + 1/6)^2 dx}{\int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx} \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3^2 &= \frac{< p_2, p_2 >}{< p_1, p_1 >} \\
&= 1/15
\end{aligned}$$

Numerische Integration für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=1}^{2} f(x_i) \int_0^1 L_{i,2}(x)dx \\
&= f(x_1) \int_0^1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx + f(x_2) \int_0^1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx \\
&= -\frac{1}{x_2 - x_1} f(x_1) \int_0^1 x - x_2 dx + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2) \int_0^1 x - x_1 dx \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(f(x_2)(1/2 - x_1) - f(x_1)(1/2 - x_2) \right) \\
&\approx 3.14754
\end{aligned}$$

Fehler: $e \approx 5.95 \cdot 10^{-3}$

Numerische Integration für $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=1}^{3} f(x_i) \int_0^1 L_{i,3}(x)dx \\
&= f(x_1) \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} dx \;+\; f(x_2) \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} dx \;+\; f(x_3) \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{3} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} dx \\
&= f(x_1) \int_0^1 \frac{x^2 - x(x_2 + x_3) + x_2 x_3}{\underbrace{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}_{=0.3}} dx \;+\; f(x_2) \int_0^1 \frac{x^2 - x(x_1 + x_3) + x_1 x_3}{\underbrace{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}_{=-0.15}} dx \\
&\quad + f(x_3) \int_0^1 \frac{x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{\underbrace{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}_{=0.3}} dx \\
&= \frac{10}{3} f(x_1) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + x_2 x_3 \right) \;-\; \frac{20}{3} f(x_2) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_1 x_3 \right) \\
&\quad + \frac{10}{3} f(x_3) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \right) \\
&= \frac{10}{3} f(x_1) \cdot \frac{1}{12} + \frac{20}{3} f(x_2) \cdot \frac{1}{15} + \frac{10}{3} f(x_3) \cdot \frac{1}{12} \\
&= \frac{5}{18} f(x_1) + \frac{4}{9} f(x_2) + \frac{5}{18} f(x_3) \\
&\approx 3.141068
\end{aligned}$$

Fehler: $e \approx -5.245 \cdot 10^{-4}$

b) Die vorgegebenen Stützstellen $(x_i \mid f(x_i))$ sind:

$$\underline{n = 2:} \qquad \left(\frac{1}{3} \mid \frac{18}{5}\right) \quad ; \quad \left(\frac{2}{3} \mid \frac{36}{13}\right)$$

$$\underline{n = 3:} \qquad \left(\frac{1}{4} \mid \frac{64}{17}\right) \quad ; \quad \left(\frac{2}{4} \mid \frac{16}{5}\right) \quad ; \quad \left(\frac{3}{4} \mid \frac{64}{25}\right)$$

<u>Numerische Integration für $n = 2$:</u>

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=1}^{2} f(x_i) \int_0^1 L_{i,2}(x)dx \\
&= -3f(x_1) \int_0^1 x - \frac{2}{3}dx \ + \ 3f(x_2) \int_0^1 x - \frac{1}{3}dx \\
&= \frac{9}{5} + \frac{18}{13} \\
&= \frac{207}{65} \\
&\approx 3.18462
\end{aligned}$$

Fehler: $e \approx +4.3023 \cdot 10^{-2}$

<u>Numerische Integration für $n = 3$:</u>

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \sum_{i=1}^{3} f(x_i) \int_0^1 L_{i,3}(x)dx \\
&= 8f(x_1) \int_0^1 (x^2 - x(x_2 + x_3) + x_2x_3)dx \ - \ 16f(x_2) \int_0^1 (x^2 - x(x_1 + x_3) + x_1x_3)dx \\
&\quad + 8f(x_3) \int_0^1 (x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2)dx \\
&= \frac{2}{3}f(x_1) - \frac{1}{3}f(x_2) + \frac{2}{3}f(x_3) \\
&= \frac{4016}{1275} \\
&\approx 3.1498
\end{aligned}$$

Fehler: $e \approx +8.2113 \cdot 10^{-3}$

Der Aufgabenteil c) findet sich bei den jeweiligen Rechnungen in a) und b).