Übungen Numerik II

Blatt 9

Aufgabe : (2+2+2+2) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ das

$$\text{Randwertproblem } \Delta u(x) = \begin{array}{rcl} u_{xx}(x) & = & f(x),\ \forall x \in \Omega \quad , f \in C^2(\Omega) \\ u(0) & = & u(1) = 0 \end{array}$$

und die Finite-Differenzen-Diskretisierung

$$(\Delta_h\, u)_i = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1$$

mit $u_i := u(i \cdot h)$, was auf die System-Matrix

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

auf dem Gitter $0, h, 2h, \dots, N \cdot h \quad , \quad h := \frac{1}{N},$ führt. (N+1 sei gerade)

Sei u die Lösung des RWP und u^h Lösung des diskretisierten Problems:

a) Bezeichne für $y : \Omega \to \mathbb{R}$ die Notation $\tilde{y} := \big(y(0), y(h), y(2h), \dots y(N \cdot h)\big)^\top$ die Auswertung einer beliebigen Funktion auf dem Gitter.

   Zeigen Sie: $(\Delta_h\, u^h)_i = \Delta u(i \cdot h)$

b) Zeigen Sie $\tilde{u} - u_h = A_h^{-1}(A_h\, \tilde{u} - \widetilde{\Delta u})$

c) Betrachten Sie für eine Gitterfunktion $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ die Norm

$$|\, z|_2 := \left(\frac{h}{3} (\sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 2 = 1}}^{N-1} 4z_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 2 = 0}}^{N-1} 2z_i^2) \right)^{1/2}$$

und zeigen Sie für eine Abbildung $y : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}, y(0) = y(1) = 0$ die Eigenschaft $\| y \|_2 = | \tilde{y} |_2 + \mathcal{O}(h^2)$ (Simpsonregel)

und für u : $| A_h \tilde{u} - \widetilde{\Delta u} |_2 \leq C h^2$ mit C unabhängig von h

d) Folgern Sie aus bereits bekannten Abschtzungen der Eigenwerte der Matrix A_h , dass gilt

$$| \tilde{u} - u^h |_2 = \mathcal{O}(h^2)$$