Blatt 4: Helicoid/Wendelfläche als Minimalfläche

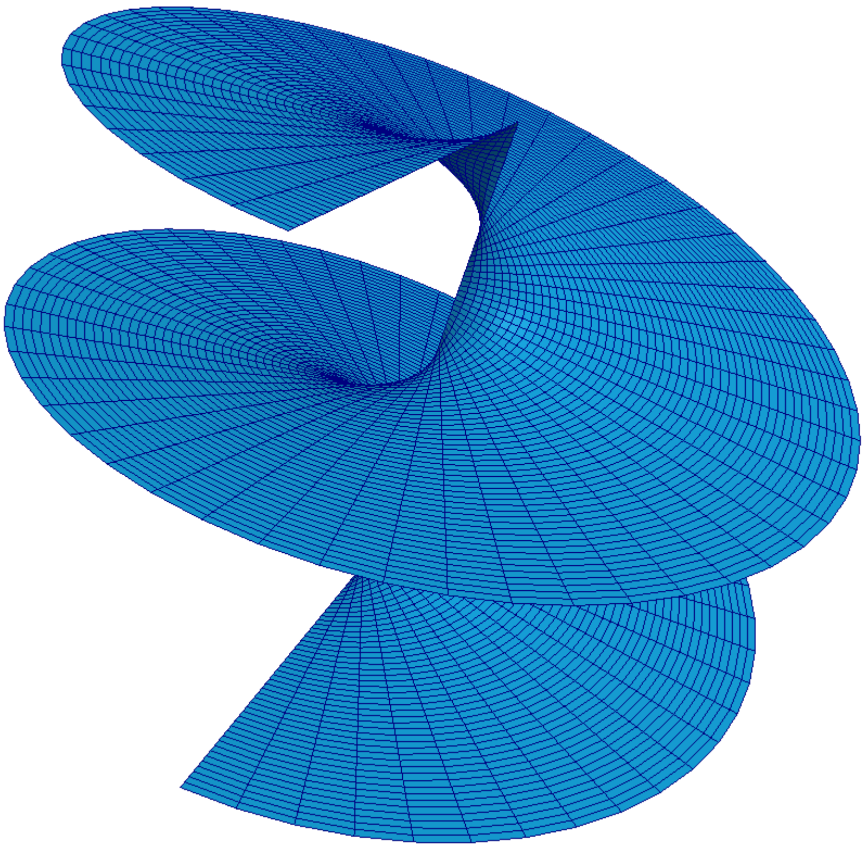

Abbildung 1: Ein Helicoid.

Für $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und $c > 0$ ist der Helicoid gegeben durch

$$\varphi(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, cu_2)^T .$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich dann

$$\varphi_{u_1} = \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_{u_2} = \begin{pmatrix} -u_1 \sin u_2 \\ u_1 \cos u_2 \\ c \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich für $g_{ij} := \left\langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \right\rangle$ für $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_1} \right\rangle &= \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 + 0 = 1 \\
\left\langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \right\rangle &= -u_1 \cos u_2 \sin u_2 + u_1 \sin u_2 \cos u_2 = 0 \\
\left\langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_2} \right\rangle &= u_1^2 \sin^2 u_2 + u_1^2 \cos^2 u_2 + c^2 = u_1^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Also:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_1^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

Ferner gilt

$$h_{ij} := \left\langle L_p \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \right\rangle = \left\langle n(p), \varphi_{u_i, u_j} \right\rangle.$$

Damit werden nun die zweiten Ableitungen und die Normale benötigt. Die Normale muss das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
n_1 \cos u_2 + n_2 \sin u_2 &= 0 \\
-n_1 u_1 \sin u_2 + n_2 u_1 \cos u_2 + c n_3 &= 0
\end{aligned}$$

erfüllen. An dieser Stelle kommt es etwas darauf an, wie man beim Auflösen vorgeht, sonst können z.T. kompliziertere Brüche auftreten. Auflösen der ersten Gleichung nach n_1 ergibt

$$n_1 = -n_2 \frac{\sin u_2}{\cos u_2}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
n_2 \frac{\sin u_2}{\cos u_2} u_1 \sin u_2 + n_2 u_1 \cos u_2 + c n_3 &= 0 \\
\Rightarrow n_2 \frac{\sin^2 u_2}{\cos u_2} u_1 + n_2 u_1 \cos u_2 &= -c n_3 \\
\Rightarrow n_2 \left(\frac{u_1 \sin^2 u_2}{\cos u_2} + u_1 \cos u_2 \right) &= -c n_3 \\
\Rightarrow u_1 n_2 \left(\frac{\sin^2 u_2 + \cos^2 u_2}{\cos u_2} \right) &= -c n_3 \\
\Rightarrow n_2 &= -c n_3 \frac{\cos u_2}{u_1}.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich jetzt n_1 bestimmen

$$\begin{aligned}
n_1 &= -n_2 \frac{\sin u_2}{\cos u_2} \\
&= c n_3 \frac{\cos u_2}{u_1} \frac{\sin u_2}{\cos u_2} \\
&= c n_3 \frac{\sin u_2}{u_1}.
\end{aligned}$$

Wird $n_3 = u_1$ gewählt, so fallen die Brüche weg und es ergibt sich für den noch nicht normierten Normalenvektor

$$\begin{aligned} n_1 &= c \sin u_2 \\ n_2 &= -c \cos u_2 \\ n_3 &= u_1 . \end{aligned}$$

Die Norm hiervon ist

$$\sqrt{c^2 \sin^2 u_2 + c^2 \cos^2 u_2 + u_1^2} = \sqrt{c^2 + u_1^2},$$

und die Normale ist damit

$$n = \frac{1}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} \begin{pmatrix} c \sin u_2 \\ -c \cos u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} .$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \varphi_{u_1,u_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{u_1,u_2} &= \begin{pmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_{u_2,u_1} \\ \varphi_{u_2,u_2} &= \begin{pmatrix} -u_1 \cos u_2 \\ -u_1 \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} h_{11} &= \langle n, \varphi_{u_1,u_1} \rangle = 0 \\ h_{12} &= \langle n, \varphi_{u_1,u_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} \left\langle \begin{pmatrix} c \sin u_2 \\ -c \cos u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} \left[-c \sin^2 u_2 - c \cos^2 u_2 \right] = \frac{-c}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} = h_{21} \\ h_{22} &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} \left\langle \begin{pmatrix} c \sin u_2 \\ -c \cos u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u_1 \cos u_2 \\ -u_1 \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + u_1^2}} \left(-c u_1 \sin u_2 \cos u_2 + c u_1 \cos u_2 \sin u_2 + 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} \\ \frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} & 0 \end{bmatrix} .$$

Da gilt $\ell_{ij} = g^{ij} h_{ij}$ wird nun die Inverse der g_{ij} benötigt, welche bei einer 2×2 Diagonalmatrix direkt angegeben werden kann. Damit gilt

$$\begin{aligned}\ell_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_1^2+c^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} \\ \frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} \\ \frac{-c}{\sqrt{u_1^2+c^2}} \frac{1}{u_1^2+c^2} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte hiervon sind nun die Hauptkrümmungen. Das characteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}&\lambda^2 - \left(\frac{-c}{\sqrt{c^2+u_1^2}} \frac{-c}{\sqrt{u_1^2+c^2}} \frac{1}{u_1^2+c^2} \right) \\ =&\lambda^2 - \left(\frac{c^2}{c^2+u_1^2} \frac{1}{u_1^2+c^2} \right) \\ =&\lambda^2 - \frac{c^2}{\left(c^2+u_1^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Die Nullenstellen in λ hiervon sind

$$\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{\left(c^2+u_1^2\right)^2}} = \pm \frac{c}{c^2+u_1^2}.$$

Die beiden Hauptkrümmungen sind somit bis auf das Vorzeichen identisch, so dass die Summe $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ ist. Damit handelt es sich um eine Minimalfläche.