V. Schulz / K. Welker Wintersemester 2013/2014

Übungen Differentialgeometrie

Blatt 12

Aufgabe 1: Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zudem sei (U,x) eine Karte von M. Des Weiteren sei die Riemannsche Metrik g gegeben durch

$$\mathrm{g}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \sum_{\mathrm{i,j}} \mathrm{v_i}\,\mathrm{g_{ij}}\,\mathrm{w_j} \qquad \left(\mathrm{v} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{v_i}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}},\ \mathrm{w} = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{w_j}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}\right).$$

(i) Zeigen Sie, dass der Gradient einer differenzierbaren Funktion $\mathrm{f}\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ bezüglich der Riemannschen Metrik g gegeben ist durch

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{f} = \sum_{\mathrm{i,j}} \mathrm{g^{ij}} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}.$$

(ii) M sei durch $\Phi(\mathrm{r},\varphi) = (\mathrm{r}\cos(\varphi), \mathrm{r}\sin(\varphi))^{\mathrm{T}}$ parametrisiert. Berechnen Sie den Gradienten einer differenzierbaren Funktion $\mathrm{f}\colon \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ bezüglich der Riemannschen Metrik g.

Aufgabe 2: Es sei $\mathrm{A}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $\mathrm{t} \mapsto \mathrm{A(t)}$ eine matrixwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit differenzierbaren Komponentenfunktionen. Zeigen Sie, dass durch

$$\frac{\mathrm{d}\,(\det(\mathrm{A(t)}))}{\mathrm{dt}} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{A}'(\mathrm{t})\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{t})\right)\, \det\left(\mathrm{A(t)}\right)$$

die Ableitung der Determinanten von A(t) gegeben ist.

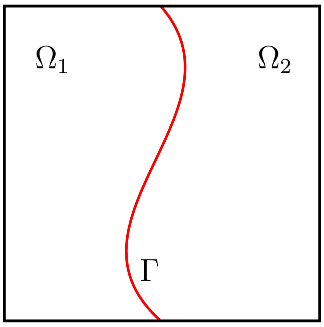
Aufgabe 3: Leiten Sie die Optimalitätsbedingung für Minimalflächen über das Formkalkül her.

Aufgabe 4: Es sei $\Omega = [0,1]^2$ mit $\Omega = \Omega_1 \underset{\mathrm{d}}{\cup} \Omega_2$ und $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Ein sogenanntes *PDE–beschränktes Formoptimierungsproblem* sei durch

$$\min_{\Gamma} \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mathrm{y}^2 \mathrm{dx} + \frac{\mu}{2}\int_{\Gamma} \mathrm{ds} \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\text{s. t. } -\triangle y = f = \begin{cases} f_1 & \text{in } \Omega_1 \\ f_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

$$\mathrm{y} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$



gegeben. Um die notwendigen Bedingungen für ein PDE–beschränkte Formoptimierungsproblem herzuleiten, wird u. a. die Formableitung der Lagrangefunktion bezüglich der schwachen Formulierung der PDE–Nebenbedingung benötigt. Diese Lagrangefunktion ist im obigen Problem gegeben durch

$$\mathcal{L}(\mathrm{y},\lambda,\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{y}^2 \mathrm{dx} + \frac{\mu}{2}\int_\Gamma \mathrm{ds} + \int_\Omega \nabla \mathrm{y} \nabla \lambda \, \mathrm{dx} - \int_\Omega \mathrm{f}\lambda \, \mathrm{dx}$$

Leiten Sie mit Hilfe dieser die notwendigen Bedingungen für das obige PDE–beschränkte Formoptimierungsproblem her.