V. Schulz / K. Welker Wintersemester 2013/2014

Übungen Differentialgeometrie

Blatt 11

Aufgabe 1: Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zudem seien X, Y, Z Vektorfelder. Zeigen Sie für den Riemannschen Krümmungstensor R die *erste Bianchi–Identität*

$$\mathrm{R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0.}$$

Aufgabe 2 (4 Zusatzpunkte): Es sei eine Immersion $\varphi\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$ ($\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ offen) gegeben. Zudem bezeichne $\mathrm{n}\colon \mathrm{U} \to \mathrm{S}^{\mathrm{n}}$ die Gauß–Abbildung. Die *Gaußsche Ableitungsgleichung* ist durch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{u_i} \partial \mathrm{u_j}} = \sum_{\mathrm{k}} \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{u_k}} + \mathrm{h_{ij} n}$$

und die *Weingartensche Ableitungsgleichung* durch

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial \mathrm{u_i}} = -\sum_{\mathrm{j,k}} \mathrm{h_{jk} g^{jk}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{u_k}}$$

gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe dieser beiden Ableitungsgleichungen sowohl die im Theorema egregium (Satz 9.7) erwähnte *Gauß–Gleichung*

$$\sum_{\mathrm{m}} (\mathrm{h_{ij} h_{km} - h_{ik} h_{jm}}) \mathrm{g^{ml}} = \mathrm{R^{l}_{ikj}},$$

als auch die *Gleichung von Codazzi–Mainardi*

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_k}} \mathrm{h_{ij}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{u_j}} \mathrm{h_{ik}} + \sum_{\mathrm{m}} \left(\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{m}} \mathrm{h_{mk}} - \Gamma_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{m}} \mathrm{h_{mj}} \right) = 0.$$

Aufgabe 3 (4 Zusatzpunkte): Es sei $\mathrm{f}\colon \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ eine mindestens zwei mal stetig differenzierbare Funktion. Zudem bezeichne A eine symmetrische und positiv definite Matrix. Berechnen Sie den Gradienten und den Hesse–Operator von f bezüglich des Skalarproduktes $\mathrm{(x,y) = x^T A y}$ $(\mathrm{x,y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$.

Aufgabe 4: (M,g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(i) Ein Vektorfeld $v(t)$ entlang einer Geodäte $c(t)$ mit $c(0) = p$ sei der Paralleltransport längs $c(t)$. Wenn $c'(0) \perp v_0 \in T_pM$, dann gilt $c'(t) \perp v(t)$ für alle t.

(ii) Wenn X und Y parallele Vektorfelder längs einer Kurve sind, dann gilt $g(X, Y) = \text{const}$.