V. Schulz / K. Welker Wintersemester 2013/2014

Übungen Differentialgeometrie

Blatt 10

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Sind zwei differenzierbare Vektorfelder X, Y über einer n-dimensionalen Mannigfaltigeit in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j},$$

dann gilt

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Aufgabe 2: Auf der Einheitskugel S^2 wird durch

$$c\colon \mathbb{R} \to S^2,\ t \mapsto (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta)^T \qquad \big(\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big)$$

ein Breitenkreis beschrieben. Weisen Sie nach, dass c genau dann eine Geodäte ist, wenn c den Äquator beschreibt (d. h. wenn $\theta = 0$).

Aufgabe 3 (4 Zusatzpunkte): Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zudem seien X, Y, Z Vektorfelder. Zeigen Sie, dass für den Riemannschen Krümmungstensor R die folgende Identität gilt:

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

Aufgabe 4: Es sei R der Riemannsche Krümmungstensor. Zeigen Sie, dass für die kanonische Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^i_p}\}_i$ in T_pM des Tangentialraumes einer Mannigfaltigkeit M gilt

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ikj} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

wobei die Koeffizienten definiert sind durch

$$R^l_{ikj} := \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^l_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} + \sum_{m=1}^{n}(\Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}).$$

Aufgabe 5: Es sei $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und X ein differenzierbares Vektorfeld an N. Des Weiteren sei für jeden Punkt $\mathrm{p} \in \mathrm{N}$ durch

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{p}} \colon \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathrm{N}$$

die orthogonale Projektion definiert. Dann heißt

$$\nabla_{\mathrm{v}}\mathrm{X}(\mathrm{p}) := \mathrm{pr}_{\mathrm{p}}\big(\mathrm{DX}(\mathrm{p})\mathrm{v}\big) \qquad (\mathrm{v} \in \mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathrm{N}),$$

die *kovariante Ableitung* von X an der Stelle p in Richtung v, wobei $\mathrm{DX}(\mathrm{p})\mathrm{v}$ die Richtungsableitung von X an der Stelle p in Richtung v bezeichnet (beachte: i. A. $\mathrm{DX}(\mathrm{p})\mathrm{v} \notin \mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathrm{N}$). Zeigen Sie, dass ∇ torsionsfrei und Riemannsch ist und damit (zusammen mit den anderen trivilerweise gültigen Eigenschaften) mit der Definition der kovarianten Ableitung auf abstrakten Mannigfaltigkeiten übereinstimmt.