

Universität Trier

Fachbereich IV

Wintersemester 2004/2005

Wavelets made easy

Kapitel 2
Mehrdimensionale Wavelets und
Anwendungen

Thomas Queckbörner

16.11.2004

Übersicht des Kapitels:

1. Einführung
2. Zweidimensionale Haar Wavelets
3. Tensorprodukt von Funktionen
4. Die Zweidimensionalen Tensorprodukt Haar Wavelets
5. Die zweidimensionale Basis Haar Wavelet Transformation
6. Die zweidimensionale schnelle Haar Wavelet Transformation
7. Anwendungen von Wavelets: Rauschreduzierung
8. Anwendungen von Wavelets: Datenkompression

1.) Einführung

In diesem Kapitel werden Wavelets von eindimensionalen Zeilen in mehrdimensionale Gitter von Daten übersetzt.

Um die Wavelets zu Kodieren, benutzen wir Matrizen, die durch Reihen von oben nach unten und Spalten von links nach rechts indiziert werden.

Entsprechend der Anzeige der Reihen geht die erste Koordinatenachse von oben nach unten, ähnlich wie Spalten geht die zweite Koordinatenachse von links nach rechts.

Diese Anzeige entspricht einer Viertel Drehung der üblichen mathematischen Achsen im Uhrzeigersinn.

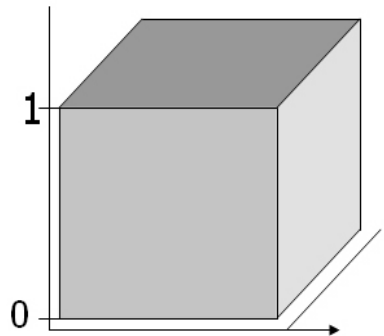
2.) Zweidimensionale Haar Wavelets

So wie die einfache Treppenfunktion sich an eindimensionale Funktionen annähert, nähert sich die zweidimensionale Treppenfunktion an zweidimensionale Funktionen an.

Entsprechend der eindimensionalen Treppenfunktion, die nur in einem Intervall den Wert 1 besitzt, besitzt die Zweidimensionale Treppenfunktion in einem Quadrat den Wert 1, und ansonsten den Wert 0.

Die einfache zweidimensionale $\Phi_{0,0}^{(0)}$ Treppenfunktion ist definiert durch

$$\Phi_{0,0}^{(0)}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



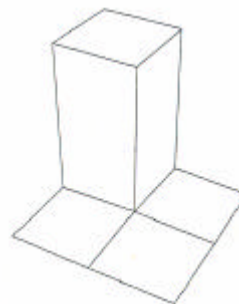
Bei der Darstellung $\Phi_{k,l}^{(j)}$ gibt der obere Index j die Frequenz an, und die unteren Indizes k und l beschreiben die Lage dieser zweidimensionalen Treppenfunktion.

Mit Frequenz ist die Aufteilung der einzelnen Achsen gemeint. Das heißt die X-Achse und die Y-Achse ist in 2^j gleich große Abschnitte unterteilt, was ergibt, dass das ganze Gitter in j^2 kleinere Gitter aufgeteilt ist.

Die Höhe eines Wavelets beträgt immer 1. Beträgt die Höhe der Treppenfunktion aber einen anderen Wert wird dieses anhand eines Koeffizienten ausgedrückt.

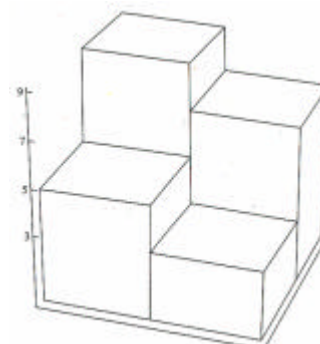
Ein Beispiel für ein zweidimensionales Haar Wavelet ist $\Phi_{0,0}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^{(1)}(x, y) &:= \Phi_{0,0}^{(0)}(2x, 2y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$



Betrachten wir nun ein Sample mit den Werten $f(0,0)=9$, $f(0,1/2)=7$, $f(1/2,0)=5$, $f(1/2,1/2)=3$. Dies ergibt eine Treppenfunktion, die durch \tilde{f} , eine Approximation an f , beschrieben wird.

$$\tilde{f} := 9 \phi_{0,0}^{(1)} + 7 \phi_{0,1}^{(1)} + 5 \phi_{1,0}^{(1)} + 3 \phi_{1,1}^{(1)}$$



3.) Das Tensorprodukt von Funktionen

Das Tensorprodukt von p und q , $p \otimes q$ ist für jedes Funktionenpaar p und q wie folgt definiert:

$$(p \otimes q)(x, y) := p(x) \cdot q(y)$$

Jetzt setzen wir die Wavelets

$$\varphi_{[0,1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi_{[0,1]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in das Tensorprodukt ein und erhalten vier verschiedene zweidimensionale Treppenfunktionen:

1. Als erstes setzen wir $p = \varphi_{[0,1]}$ und $q = \varphi_{[0,1]}$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^{(0)}(x, y) &:= (p \otimes q) \\ &= (\varphi_{[0,1]} \otimes \varphi_{[0,1]})(x, y) \\ &= \varphi_{[0,1]}(x) \cdot \varphi_{[0,1]}(y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Bild 1 stellt dies als zweidimensionale Treppenfunktion und als Kodierung in einer Matrix dar.

2. Nun setzen wir $p = \varphi_{[0,1]}$ und $q = \psi_{[0,1]}$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^{h,(0)}(x, y) &:= (p \otimes q) \\ &= (\varphi_{[0,1]} \otimes \psi_{[0,1]})(x, y) \\ &= \varphi_{[0,1]}(x) \cdot \psi_{[0,1]}(y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \text{ und } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die entsprechende zweidimensionale Treppenfunktion und Kodierung in einer Matrix sind Bild 2 dargestellt.

Der hier verwendete Exponent h zeigt horizontale Wechsel in den Daten an. Diese sind parallel zu den vertikalen Kanten der ersten rotierten Achse des Koordinatensystems.

3. Als dritte Möglichkeit setzen wir $p = \psi_{[0,1]}$ und $q = \varphi_{[0,1]}$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,0}^{v,(0)}(x, y) &:= (p \otimes q) \\ &= (\psi_{[0,1]} \otimes \varphi_{[0,1]})(x, y) \\ &= \psi_{[0,1]}(x) \cdot \varphi_{[0,1]}(y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } 0 \leq y < 1 \\ -1 & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

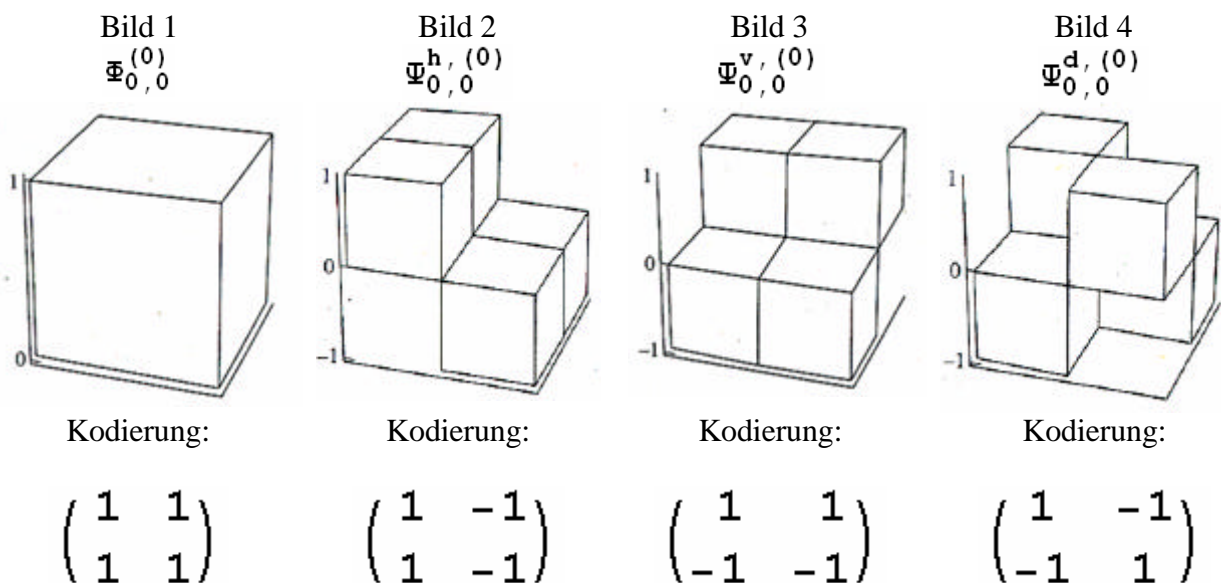
Der Exponent v zeigt vertikale Wechsel in den Daten an. Diese sind parallel zu den horizontalen Kanten der zweiten rotierten Achse des Koordinatensystems. Die entsprechende zweidimensionale Treppenfunktion und die Kodierung in einer Matrix sind in Bild 3 dargestellt.

4. Als letztes setzen wir $p = \psi_{[0,1[}$ und $q = \psi_{[0,1[}$

$$\begin{aligned} \Psi_{0,0}^{d,(0)}(x, y) &:= (p \otimes q) \\ &= (\psi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[})(x, y) \\ &= \psi_{[0,1[}(x) \cdot \psi_{[0,1[}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 \quad \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ &1 \quad \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ und } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ &= \begin{cases} -1 & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ und } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{wenn } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Exponent v zeigt die Wavelets mit diagonalen Wechseln in den Daten. Dargestellt sind die entsprechende zweidimensionale Treppenfunktion und die Kodierung in einer Matrix in Bild 4.



4.) Die Zweidimensionalen Tensorprodukt Haar Wavelets

Dieser Abschnitt überträgt den vorhergegangenen Abschnitt anhand einer Definition in die Allgemeinheit.

Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen j (Frequenz) und k und l (Lage) sind die Zweidimensionalen Tensorprodukt Haar Wavelets wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{(j)} &:= \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_l^{(j)} \\ \Psi_{k,l}^{h,(j)} &:= \varphi_k^{(j)} \otimes \psi_l^{(j)} \\ \Psi_{k,l}^{v,(j)} &:= \psi_k^{(j)} \otimes \varphi_l^{(j)} \\ \Psi_{k,l}^{d,(j)} &:= \psi_k^{(j)} \otimes \psi_l^{(j)} \end{aligned}$$

5.) Die zweidimensionale Basis Haar Wavelet Transformation

Ähnlich wie man eindimensionale Wavelets transformiert, transformiert man auch zweidimensionale Wavelets:

Man führt die eindimensionale Wavelet Transformation erst mit jeder Zeile und anschließend mit jeder Spalte durch.

Wenn wir also eine Approximation an f , eine zweidimensionale Treppenfunktion \tilde{f} betrachten,

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ f\left(\frac{1}{2}, 0\right) & f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} \\ s_{1,0} & s_{1,1} \end{pmatrix}$$

würde die zweidimensionale Basis Haar Wavelet Transformation wie folgt durchgeführt werden:

$$\begin{pmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} \\ s_{1,0} & s_{1,1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{s_{0,0}+s_{0,1}}{2} & \frac{s_{0,0}-s_{0,1}}{2} \\ \frac{s_{1,0}+s_{1,1}}{2} & \frac{s_{1,0}-s_{1,1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} \frac{(s_{0,0}+s_{0,1})+(s_{1,0}+s_{1,1})}{4} & \frac{(s_{0,0}-s_{0,1})+(s_{1,0}-s_{1,1})}{4} \\ \frac{(s_{0,0}+s_{0,1})-(s_{1,0}+s_{1,1})}{4} & \frac{(s_{0,0}-s_{0,1})-(s_{1,0}-s_{1,1})}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Nun können wir anhand dieser Koeffizienten die ursprünglichen Daten mit Hilfe von Tensor Produkt Wavelets ausdrücken.

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= s_{0,0} \Phi_{0,0}^{(1)} + s_{0,1} \Phi_{0,1}^{(1)} + s_{1,0} \Phi_{1,0}^{(1)} + s_{1,1} \Phi_{1,1}^{(1)} \\ &= \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) + (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1]} \otimes \varphi_{[0,1]} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) + (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1]} \otimes \psi_{[0,1]} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) - (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1]} \otimes \varphi_{[0,1]} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) - (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1]} \otimes \psi_{[0,1]} \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir das Sample $\tilde{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ mit der Transformation $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Setzt man diese Transformation in die obige Gleichung ein, erhält man

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \cdot \varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} + 1 \cdot \varphi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[} + 2 \cdot \psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} + 0 \cdot \psi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[}$$

Jetzt können wir anhand dieser Gleichung und dieses Beispiels die verschiedenen Einträge der Transformation interpretieren:

Der Eintrag oben links, in diesem Fall die 6, zeigt den Durchschnitt der ursprünglichen Daten an. Dies wird mit dem Wavelet $\varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[}$ beschrieben.

Der Eintrag oben rechts, 1, zeigt die horizontale Kante in den Daten an, also einen Abfall von links nach rechts, der von dem Wavelet der Form $\varphi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[}$ ein-mal gemessen worden ist. Dieser Abfall hat die Größe $1 \cdot 2 = 2$.

Der Eintrag unten links, 2, zeigt die vertikalen Kanten in den Daten an, also einem Abfall von oben nach unten. Dies wurde 2-mal von dem Wavelet $\psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[}$ gemessen und hat die Größe $2 \cdot 2 = 4$.

Der Eintrag unten rechts, 0, zeigt an, dass in diesen Daten kein horizontaler Wechsel vorzufinden ist. Dies wird durch das Wavelet $\psi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[}$ angezeigt.

Die durchschnittliche Höhe beträgt also 6, der horizontale Unterschied von links nach rechts hat die Größe 2 und der vertikale Unterschied von oben nach unten hat die Größe 4.

Um diese Daten zu komprimieren nehmen wir die Koeffizienten mit den höchsten Beträgen, und vernachlässigen die anderen, da dies einen kaum entscheidenden Datenverlust erzeugt.

Dies können wir dann anhand der Berechnung der übrigen Kombinationen der Wavelets rekonstruieren.

Als Beispiel betrachten wir wieder das Sample $\tilde{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ mit der Transformation $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

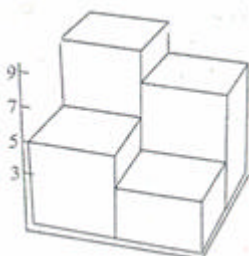
Um diese Transformation weiter zu komprimieren ziehen wir die Koeffizienten mit den höchsten Beträgen heraus und kodieren sie mit den Eigenschaften der zugehörigen Wavelets

als Matrix: $6 \cdot \varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} + 2 \cdot \psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[}$

$$= 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Vergleichen wir nun die Ausgangsdaten und die komprimierten Daten erkennen wir leicht die Komprimierung der alten Daten.

Ursprünglichen Daten



Rekonstruktion der Daten nur anhand der größten Koeffizienten



Um die eben angewendete Gleichung

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= s_{0,0} \Phi_{0,0}^{(1)} + s_{0,1} \Phi_{0,1}^{(1)} + s_{1,0} \Phi_{1,0}^{(1)} + s_{1,1} \Phi_{1,1}^{(1)} \\ &= \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) + (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) + (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) - (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) - (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[}\end{aligned}$$

zu verifizieren, müssen wir die Wavelets in Termen der Treppenfunktion ausdrücken:

$$\begin{aligned}\Phi_{0,0}^{(0)} &= \varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &= \Phi_{0,0}^{(1)} + \Phi_{0,1}^{(1)} + \Phi_{1,0}^{(1)} + \Phi_{1,1}^{(1)} \\ \Psi_{0,0}^{h,(0)} &= \varphi_{[0,1[} \otimes \psi \\ \Psi_{0,0}^{h,(0)} &= \Phi_{0,0}^{(1)} + \Phi_{0,1}^{(1)} - \Phi_{1,0}^{(1)} - \Phi_{1,1}^{(1)} \\ \Psi_{0,0}^{v,(0)} &= \psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &= \Phi_{0,0}^{(1)} - \Phi_{0,1}^{(1)} + \Phi_{1,0}^{(1)} - \Phi_{1,1}^{(1)} \\ \Psi_{0,0}^{d,(0)} &= \psi_{[0,1[} \otimes \psi \\ &= \Phi_{0,0}^{(1)} - \Phi_{0,1}^{(1)} - \Phi_{1,0}^{(1)} + \Phi_{1,1}^{(1)}\end{aligned}$$

Nun tragen wir die Koeffizienten jeder Gleichung in eine Spalte einer Matrix, in die so genannte Basiswechselmatrix Ω

$$\Omega = \begin{matrix} & \Phi_{0,0}^{(0)} & \Psi_{0,0}^{h,(0)} & \Psi_{0,0}^{v,(0)} & \Psi_{0,0}^{d,(0)} \\ \begin{matrix} \Phi_{0,0}^{(1)} \\ \Phi_{0,1}^{(1)} \\ \Phi_{1,0}^{(1)} \\ \Phi_{1,1}^{(1)} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Nun invertieren wir diese Matrix zum Beispiel mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{0,0}^{(1)} & \Phi_{0,1}^{(1)} & \Phi_{1,0}^{(1)} & \Phi_{1,1}^{(1)} \\ \Omega = & \begin{pmatrix} \Phi_{0,0}^{(0)} & \Psi_{0,0}^{h,(0)} & \Psi_{0,0}^{v,(0)} & \Psi_{0,0}^{d,(0)} \\ \Phi_{0,1}^{(0)} & \Psi_{0,1}^{h,(0)} & \Psi_{0,1}^{v,(0)} & \Psi_{0,1}^{d,(0)} \\ \Phi_{1,0}^{(0)} & \Psi_{1,0}^{h,(0)} & \Psi_{1,0}^{v,(0)} & \Psi_{1,0}^{d,(0)} \\ \Phi_{1,1}^{(0)} & \Psi_{1,1}^{h,(0)} & \Psi_{1,1}^{v,(0)} & \Psi_{1,1}^{d,(0)} \end{pmatrix} \end{array}$$

Jetzt lesen wir die neuen Spalten ab und erhalten folgende Gleichungen:

$$\Phi_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{4} \Phi_{0,0}^{(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{h,(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{v,(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{d,(0)}$$

$$\Phi_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \Phi_{0,0}^{(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{h,(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{v,(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{d,(0)}$$

$$\Phi_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{4} \Phi_{0,0}^{(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{h,(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{v,(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{d,(0)}$$

$$\Phi_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \Phi_{0,0}^{(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{h,(0)} - \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{v,(0)} + \frac{1}{4} \Psi_{0,0}^{d,(0)}$$

Diese Werte muss man nun noch nur noch in die Gleichung einsetzen und umformen, um den Beweis abzuschließen.

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= s_{0,0} \Phi_{0,0}^{(1)} + s_{0,1} \Phi_{0,1}^{(1)} + s_{1,0} \Phi_{1,0}^{(1)} + s_{1,1} \Phi_{1,1}^{(1)} \\ &= \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) + (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) + (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \varphi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} + s_{0,1}) - (s_{1,0} + s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1[} \otimes \varphi_{[0,1[} \\ &\quad + \frac{(s_{0,0} - s_{0,1}) - (s_{1,0} - s_{1,1})}{4} \psi_{[0,1[} \otimes \psi_{[0,1[} \end{aligned}$$

6.) Die zweidimensionale schnelle Haar Wavelet Transformation

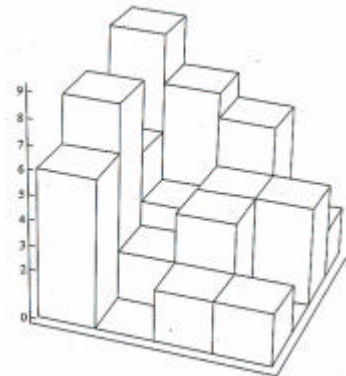
Dieser Abschnitt behandelt die Erweiterung der eindimensionalen schnellen Haar Wavelet Transformation zu einer zweidimensionalen schnellen Haar Wavelet Transformation.

Diese Erweiterung funktioniert wie bei der zweidimensionalen Basis Haar Wavelet Transformation, also erst eine eindimensionale Transformation mit jeder Zeile und anschließend mit jeder Spalte.

Als ein Beispiel betrachten wir ein Sample mit 16 Werten.

\tilde{f} Ist eine Approximation an f .

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Wenn wir diese Matrix nun transformieren, erkennt man schnell, dass dies einer zweidimensionalen Basis Wavelet Transformation von jeder der vier anliegenden 2x2 Felder entspricht.

Um die Transformation zu komplettieren muss man nun die einzelnen Transformationen miteinander verbinden:

Dies geschieht zuerst durch eine Umsortierung der Einträge und anschließend aus einer Transformation der 4 Durchschnitte.

- Die Summen links oben werden in den 2x2 Block links oben sortiert. Diese Einträge entsprechend Wavelets der Form $\varphi_{m,n} \otimes \varphi_{k,l}$
- Die Differenzen rechts oben werden in den 2x2 Block rechts oben sortiert. Diese Einträge entsprechend den Wavelets $\varphi_{m,n} \otimes \psi_{k,l}$
- Die Differenzen rechts unten werden nun den in 2x2 Block rechts unten eingeordnet. Sie entsprechen Wavelets der Form $\psi_{m,n} \otimes \psi_{k,l}$
- Die Differenzen links unten, die Wavelets der Form $\psi_{m,n} \otimes \varphi_{k,l}$ entsprechen, werden in den 2x2 Block links unten sortiert.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach der Transformation des oberen linken 2x2 Blockes ist die Transformation beendet:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus resultiert das Ergebnis der zweidimensionalen schnellen Haar Wavelet Transformation:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.) Anwendungen von Wavelets: Rauschreduzierung

Mit Hilfe der Wavelet Transformation kann man das Rauschen bei Signalen reduzieren. Möglich ist dies zum einen bei Weißem Rauschen und zum anderen bei Bandspezifischem Rauschen.

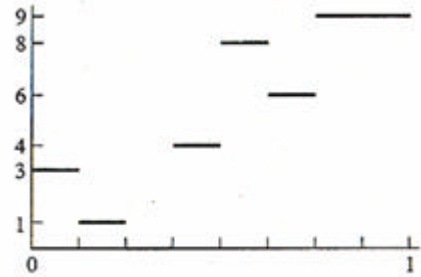
Das weiße Rauschen kann man dann entfernen, wenn das Rauschen an sich zufälliger Natur ist. Entfernt man dann die zufälligen Koeffizienten, wird das rauschfreie, ursprüngliche Signal wiederhergestellt.

Das Bandspezifische Rauschen tritt nur bei Bandlimitierten Signalen auf. Also stellt das Entfernen der Frequenzen außerhalb des Frequenzbandes das ursprüngliche Signal wieder her.

Als Beispiel zur Rauschentfernung von weißem Rauschen betrachten wir nun ein Sample mit $\vec{s} := (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$.

Transformiert man diese Werte, erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} \vec{s}^{-(0)} &= (a_0^{(0)}, c_0^{(2)}, c_0^{(1)}, c_1^{(2)}, c_0^{(0)}, c_2^{(2)}, c_1^{(1)}, c_3^{(2)}) \\ &= (5, 1, 0, -2, -3, 1, -1, 0) \end{aligned}$$



Betrachtet man nun die Werte mit der höchsten Frequenz, also alle Werte mit dem Koeffizienten $c^{(2)}$, erkennt man, dass diese Werte den Durchschnitt 0 besitzen.

$$c^{(2)} = (1, -2, 1, 0)$$

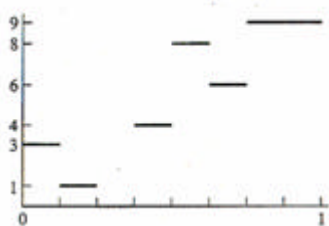
Deshalb setzen wir alle Werte mit dem Koeffizient $c^{(2)}$ gleich Null. $c^{(2)} = (0, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{s}^{-(0)'} = (5, 0, 0, 0, -3, 0, -1, 0)$$

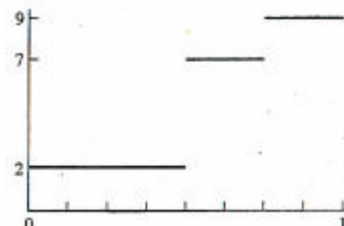
Wenn dieses Signal nicht zu dem ursprünglichen Signal können wir anhand der Speichersparenden Inversen Haar Wavelet Transformation das korrigierte Signal herstellen.

$$\Rightarrow \vec{s}' = (2, 2, 2, 2, 7, 7, 9, 9,)$$

Die folgenden Bilder zeigen den Unterschied des ursprünglichen und des korrigierten Signals deutlich:



Das ursprüngliche Signal



Das korrigierte Signal

10.) Anwendungen von Wavelets: Datenkompression

Die Datenkompression lässt sich am besten an einem Beispiel nachvollziehen. Deshalb betrachten wir das Sample

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Daten zu komprimieren. Zum einen sortiert man die Koeffizienten mit den höchsten Beträgen aus und zum anderen sortiert man den oberen linken 2x2 Block aus.

Zuerst wählen wir die Koeffizienten mit den höchsten Beträgen aus:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

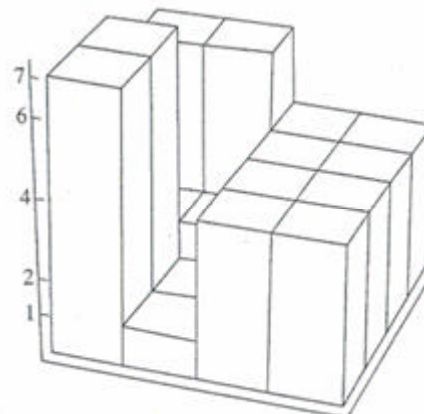
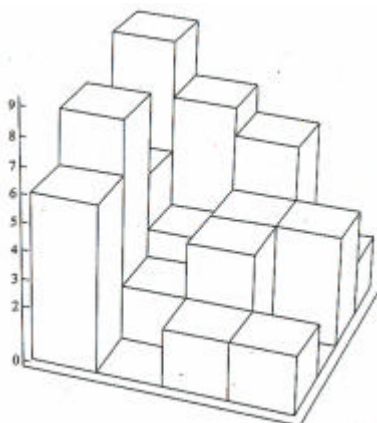
- Die Koeffizienten haben folgende Bedeutung:
- (o) 4 stellt den durchschnitt aller Werte der ursprünglichen Daten dar.
 - (h) 3 zeigt die horizontalen Unterschiede der Größe 2 der links unteren Ecke an, also eine gesamte Differenz der Größe 6
 - (v) 2 zeigt den vertikalen Unterschiede der Größe 2, in der links oberen Ecke an. Die gesamte Größe beträgt also 4.

Diese Koeffizienten werden nun mit ihren Wavelets, bzw. mit den jeweils als Matrizen kodierten Wavelets addiert, wodurch die Komprimierung komplett wird.

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten mit den niedrigeren Beträgen spielen durch ihre geringe Größe keine wesentliche Rolle, so dass wir sie weglassen können, ohne einen großen Fehler zu erhalten.

Vergleicht man nun die ursprünglichen Daten mit den Komprimierten, erkennt man eine deutliche Vereinfachung der Daten:

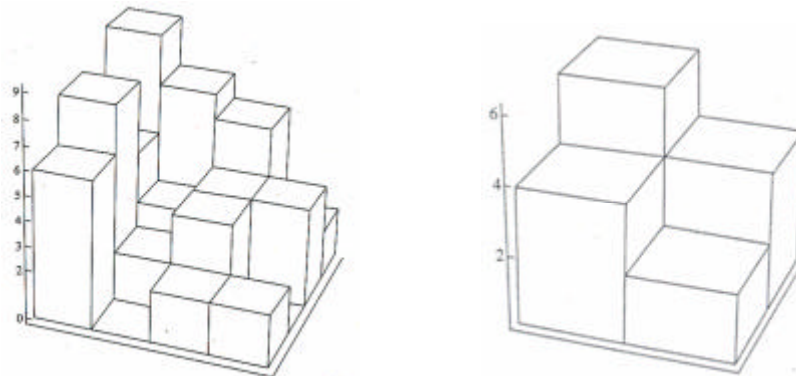


Nun wenden wir die zweite Möglichkeit an und sortieren den oberen linken 2x2 Block mitsamt seinen kodierten Wavelets raus.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow & 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auch hier kann man anhand eines Vergleichs die Kompression sehr gut beobachten.



Allerdings muss man betonen, dass man diese Kompressionen aufgrund ihrer gewissen Ungenauigkeit nicht für alle Anwendungen verwenden kann. Je nachdem welche Genauigkeit erfordert wird, erweisen sich diese zwei Methoden als unbrauchbar.