

11. Übung Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen

Abgabe: Bis Dienstag, 02.02.2010 um 8:30 Uhr im Kasten 12

H31: Es seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$.

Zeigen Sie:

- $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.
- Ist $X = Y$ und $T = T^*$, so ist $r(T) = \|T\|$.

H32: Es seien X ein Hilbertraum und $L \subset X$ ein Teilraum. Zeigen Sie:

- L^\perp ist abgeschlossener Teilraum von X ,
- $L \subset L^{\perp\perp} := (L^\perp)^\perp$.
- Ist L abgeschlossen, so ist $L = L^{\perp\perp}$.

H33: Es seien X ein Hilbertraum und $M \subset X$ eine ONB. Beweisen Sie:

- Ist $(c_e)_{e \in M} \in \mathbb{R}^M$ beschränkt und $T = \sum_{e \in M} c_e P_e$, so ist $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$.
- Ist X separabel, $\dim(X) = \infty$ und ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so existiert ein $T \in L(X)$ symmetrisch mit $\sigma(T) = K$ und $\sigma_p(T)$ abzählbar und dicht in K .