

## 6. Übung zur Vorlesung Elemente der Analysis I

### Gruppenübungen

G13: Berechnen Sie  $\inf M$  und  $\sup M$  für

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{1+n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

G14: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (i) Für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $\sqrt{c^2} = c$ .
- (ii) Für alle  $c \geq 0$  gilt  $(\sqrt{c})^2 = c$ .
- (iii) Für alle  $c, d \geq 0$  gilt  $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d}$ .
- (iv) Für alle  $c, d \in \mathbb{R}$  mit  $cd \geq 0$  gilt  $\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d}$ .

G15: Weisen Sie nach, dass für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $z = (x, y)$  gilt

$$z \cdot z^{-1} = (1, 0),$$

wobei  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ .

### Hausübungen

H15: Bestimmen Sie  $\inf M$  und  $\sup M$  für

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{t}{1+t} \text{ für ein } t \in [0, \infty) \right\}$$

H16: Beweisen Sie: Für alle  $x, y > 0$  gilt

- (i)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$ ,
- (ii)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ .

Hinweis zu (ii): Überlegen Sie sich zunächst, dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a + b \geq 0$  gilt

$$a^3 + b^3 - ab^2 - ba^2 \geq 0.$$