J. Müller

WiSe 2019/2020
18.12.2019

7. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A25: Es seien $D, G \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D \to G$ eine konforme Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist (z_n) eine Folge in D mit $z_n \to \zeta \in \partial D$, so existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset G$ ein n_K mit $\varphi(z_n) \notin K$ für $n \geq n_K$.

b) Existiert eine Fortsetzung von φ zu einer auf $\overline{D}$ stetigen Funktion (ebenfalls mit φ bezeichnet), so gilt $\varphi(\partial D) \subset \partial G$. Ist dabei D beschränkt, so gilt $\varphi(\partial D) = \partial G$.

Gilt Gleichheit in b) auch ohne die Voraussetzung der Beschränktheit von D?

A26: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit $0 \in K \neq \{0\}$ und so, dass K und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend sind. Zeigen Sie, dass eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus K$ existiert mit

$$\varphi(z) = cz + O(1) \qquad (|z| \to +\infty)$$

für ein $c \neq 0$.

Hinweis: $1/(\mathbb{C}_\infty \setminus K) := \{1/\zeta : \zeta \in \mathbb{C}_\infty \setminus K\}$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$.

A27: (Tannenbaum im Bauhaus-Stil)

Es seien (α_k) eine streng fallende Folge in $(0, 1)$ mit $\alpha_k \to \alpha_\infty$ und

$$K := [0, i] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} [-1 + (1 + i)\alpha_k, 1 + (-1 + i)\alpha_k].$$

Skizzieren Sie K und überlegen Sie sich, dass $\mathbb{C} \setminus K$ konform äquivalent zu $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ist. Überlegen Sie sich auch, dass $K = \partial(\mathbb{C} \setminus K)$ nicht lokal zusammenhängend ist (eine Definition finden Sie im Anhang A des Vorlesungsskriptes).

A28: Finden Sie eine Familie $\mathcal{F} \subset M(\mathbb{C})$ so, dass $\mathcal{F}$ nicht sphärisch normal an 0 ist und zwei Werte auslässt, d. h. $\#\big(\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbb{C})\big) = 2$.