J. Müller

WiSe 2019/2020
11.12.2019

6. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A21: Berechnen Sie die Umkehrfunktion $\psi : \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4] \to \mathbb{D}$ der Koebe-Abbildung φ.

Hinweis: Setzt man $\sqrt{\zeta} := e^{\log(\zeta)/2}$ für $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so gilt $(\sqrt{\zeta})^2 = \zeta$.

A22: Zeigen Sie: Ist f ganz und injektiv, so ist f affin-linear und nicht konstant, also von der Form $f(z) = a + cz$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}^*$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ für ganze Funktionen g, die kein Polynom sind, dicht in $\mathbb{C}$ ist (dies folgt aus B. 1.17).

A23:

a) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, (S, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{F}$ eine normale Familie in $C(\Omega, S)$. Zeigen Sie: Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ und $f \in C(\Omega, S)$, so gilt $f_n \to f$ für $n \to \infty$ in $C(\Omega, S)$ genau dann, wenn alle *konvergenten* Teilfolgen von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\Omega, S)$ gegen f konvergieren.

b) (Satz von Vitali) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$ sphärisch normal und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Beweisen Sie: Hat $A \subset G$ einen Häufungspunkt in G und ist $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $z \in A$ sphärisch konvergent, so existiert ein $f \in M(G)$ mit $f_n \to f$ sphärisch lokal gleichmäßig auf G.

A24: Zeigen Sie:

a) Für alle $t > 0$ gilt $(1 + t/s)^s \to \exp(t)$ für $s \to +\infty$.

b) Ist $f_n(z) := (1 + z/n)^n$, so gilt $f_n \to \exp$ für $n \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$.