J. Müller WiSe 2019/2020
04.12.2019

5. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A17: a) Zeigen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ normal, so ist $\mathcal{F}$ lokal beschränkt.

b) Finden Sie Funktionen $f_n \in C(\mathbb{C})$ so, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal beschränkt, aber nicht normal in $C(\mathbb{C})$ ist.

A18: Zeigen Sie:

a) (Joukowski-Abbildung) Die Funktion $j : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit

$$j(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}^*)$$

ist surjektiv.

b) $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

c) j bildet $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ konform auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab und für $R > 1$ ist $j\big(K_R(0)\big)$ eine Ellipse mit Halbachsen $(R \pm 1/R)/2$.

A19: Beweisen Sie: Ist f eine ganze Funktion und existiert ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ mit $f(\mathbb{C}) \subset G$, so ist f konstant.

A20: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $(\tau_a f)(h) := f(a + h) - f(a)$ für $a \in \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$. Dann heißt f winkeltreu an der Stelle a, falls ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\tau_a f(re^{i\theta})}{|\tau_a f(re^{i\theta})|} = e^{i(\theta+\alpha)}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f \in H(\Omega)$ nicht lokal konstant an a, so ist f genau dann winkeltreu an a, wenn $f'(a) \neq 0$ gilt.

Verwenden Sie: Hat f an a eine w-Stelle der Vielfachheit m, so existieren eine Umgebung U von 0 und eine auf U holomorphe und injektive Funktion g mit $f(a + h) - w = g^m(h)$ für $h \in U$.