J. Müller

WiSe 2019/2020
13.11.2019

3. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A9: Zeigen Sie:

a) Ist $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$, so gilt $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2$ genau dann, wenn

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta).$$

b) Ist $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2$ mit $\zeta \neq 1$ und sind $s := \xi/(1-\zeta)$, $t := \eta/(1-\zeta)$ sowie $z = s + it$, so gilt

$$1 + |z|^2 = 1/(1 - \zeta).$$

c) Durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1 + |z|^2}\,(s, t, |z|^2) \qquad (z = s + it \in \mathbb{C})$$

ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ definiert mit

$$\varphi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{1 - \zeta}(\xi + i\eta)$$

für $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2$ mit $\zeta \neq 1$.

A10: Beweisen Sie: Für $z, w \in \mathbb{C}_\infty$ gilt $\chi(z, w) = \chi(1/z, 1/w)$.

Hinweis: Verwenden Sie die alternative Darstellung für $\chi(z, w)$ aus Bemerkung 2.8.[1]

A11: a) Für $A = (a_{jk}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sei φ_A die Möbius-Transformation mit

$$\varphi_A(z) := \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}.$$

Rechnen Sie nach: Ist $B = (b_{jk}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, so gilt $\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$.

b) Berechnen Sie die sphärische Ableitung $\varphi^\#$ der Cayley-Transformation $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$, definiert durch

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

A12: Zeigen Sie: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right) = \arctan(t).$$

[1] Zusatzaufgabe: Beweisen Sie diese Darstellung.