J. Müller

WiSe 2019/2020
06.11.2019

2. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A5: (Maximumprinzip; positive Form) Für $K \subset \mathbb{C}$ kompakt sei

$$A(K) := \{f \in C(K) : f|_{K^\circ} \text{ holomorph}\}.$$

Beweisen Sie: Sind $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f \in A(\overline{G})$ nicht konstant, so existiert ein $\zeta \in \partial G$ mit $|f(\zeta)| > |f(z)|$ für alle $z \in G$.

A6: Es seien f eine ganze Funktion und

$$M(r, f) := \max_{K_r(0)} |f|$$

für $r \geq 0$. Zeigen Sie:

a) Ist f nicht konstant, so ist $r \mapsto M(r, f)$ streng monoton wachsend.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe A5.

a) (Liouville) Ist $d \in \mathbb{N}$ so, dass $r^{-d}M(r, f) \to 0$ für $r \to \infty$, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq d - 1$.

A7: a) (de l'Hospital) Beweisen Sie: Haben f und g hebbare Singularitäten oder Pole an a mit $n(f, a) = n(g, a) =: n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h)}{g(a + h)} = \frac{c_n(f, a)}{c_n(g, a)} .$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h \sin h} .$$

A8: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie:

a) Ist $g \in H(G)$ nullstellenfrei und existiert eine Stammfunktion zu g'/g in G, so existiert ein Zweig des Logarithmus von g in G.
Hinweis: Verwenden Sie, dass holomorphe Funktionen mit verschwindender Ableitung auf Gebieten konstant sind.

b) Sind $f, h \in C(G)$ mit $\exp(f) = \exp(h)$ in G, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $(f - h)(z) = 2\pi ik$ für alle $z \in G$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass Bilder von G unter stetigen reellwertigen Abbildungen Intervalle sind.