J. Müller

WiSe 2019/2020
05.02.2020

12. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A45: Zeigen Sie: Es gilt $P(\overline{\mathbb{D}}) = A(\overline{\mathbb{D}})$.

Hinweis: Zu $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $r < 1$ mit $\|f(r\,\cdot) - f\|_\infty < \varepsilon$.

A46: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Ist U die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so heißt $\widehat{K} := \mathbb{C} \setminus U$, also die Vereinigung von K und allen beschränkten Komponenten von $\mathbb{C} \setminus K$, die polynomkonvexe Hülle von K. Zeigen Sie

a) Ist p ein Polynom, so gilt $\max\limits_{\widehat{K}} |p| = \max\limits_{K} |p|$.

b) Ist $f \in P(K)$, so existiert eine Funktion $F \in A(\widehat{K})$ mit $f = F|_K$.

A47: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Beweisen Sie: Ist $\mathbb{C} \setminus K$ nicht zusammenhängend, so ist $P(K) \neq A(K)$.

A48:

a) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $A \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω. Überlegen Sie sich, dass ein $f \in M(\Omega)$ existiert mit $Z(f) = A$.

b) Beweisen Sie, dass eine Funktion $f \in M(\mathbb{D})$ existiert, die nicht meromorph fortsetzbar ist, d. h. es gibt kein Gebiet $U \supset \mathbb{D}$, $U \neq \mathbb{D}$ so, dass $f = F|_{\mathbb{D}}$ für ein $F \in M(U)$ gilt. Hinweis: $\{(1 - 1/n)e^{2\pi i j/n} : n \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, n\}$ hat die Häufungspunktmenge $\mathbb{S}$ in $\mathbb{C}$.