J. Müller

WiSe 2019/2020
29.01.2020

11. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A41: Es seien $a = 1 - i$ und $b = 1 + i$ sowie $\gamma := \left(s_a^b,\, s_b^{-a},\, s_{-a}^{-b},\, s_{-b}^a\right)$. Dann ist γ^* der Rand des Quadrates Q mit den Ecken $\pm a$ und $\pm b$. Überlegen Sie sich, dass $\operatorname{ind}(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in Q^\circ$ gilt.

A42: Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Runge für Approximation auf kompakten Mengen $K \subset \mathbb{C}$: Hat $A \subset \mathbb{C} \setminus K$ in jeder Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ einen Häufungspunkt, so gilt

$$f|_K \in \overline{\operatorname{span}}\{g_a|_K : a \in A\}$$

für alle auf einer offenen Obermenge von K holomorphen Funktionen f.

A43: Es seien $G = \mathbb{D} \setminus B_{2/3}(1/3)$ und $K := \overline{G}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $f \in H(G)$ existiert eine Polynomfolge (p_n) mit $p_n \to f$ in $H(G)$.

b) Es existieren $f \in H(\mathbb{C}^*)$ mit $f|_K \notin P(K)$.

A44: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Überlegen Sie sich, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ ist zusammenhängend.

b) Zu jedem $f \in H(G)$ existiert eine Polynomfolge (p_n) mit $p_n \to f$ in $H(G)$.

c) Für alle geschlossenen Pfade γ in G und alle $f \in H(G)$ und gilt $\int_\gamma f = 0$.

d) Jedes $f \in H(G)$ hat eine Stammfunktion auf G, d. h. G ist einfach zusammenhängend.

e) Ist $g \in H(G)$ nullstellenfrei, so existiert ein $f \in H(G)$ mit $\exp(f) = g$.

f) Ist $g \in H(G)$ nullstellenfrei, so existiert ein $f \in H(G)$ mit $f^2 = g$.

g) $G = \mathbb{C}$ oder G ist konform äquivalent zu $\mathbb{D}$.

h) Jeder geschlossene Pfad in G ist G-nullhomolog.

Hinweis zu g) $\Rightarrow$ h): Ist $\varphi : G \to \mathbb{D}$ konform und $\psi = \varphi^{-1}$, so ist $\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_{\varphi\circ\gamma} \frac{\psi'}{\psi - z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$.