J. Müller

WiSe 2019/2020
22.01.2020

10. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A37: Es sei $f \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie: Ist $I(f) \neq \varnothing$, so gilt $J(f) = \partial I(f)$.

A38: Es sei $f \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie:

a) Ist G ein Gebiet mit $G \cap J(f) \neq \varnothing$ und ist $(f^{\circ n_k})_k$ eine Teilfolge von $(f^n)_n$ mit $f^{\circ n_k} \to g$ sphärisch lokal gleichmäßig auf G, so gilt $g \in H(G)$.

b) Ist $I(f) \neq \varnothing$ und ist $N \subset \mathbb{N}$ unendlich, so ist die Familie $\{f^{\circ n} : n \in N\}$ an allen Stellen $a \in J(f)$ nicht normal.

A39: (Partialbruchzerlegung) Es seien $B \subset \mathbb{C}$ und $f \in M(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $f \in \operatorname{span}\{g_a^n : a \in B,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ genau dann, wenn f eine rationale Funktion mit $P(f) \subset B$ ist und ein $c \in \mathbb{C}$ existiert mit $f(z) \to c$ für $|z| \to +\infty$.

b) Es gilt $f \in \operatorname{span}\{g_a^n : a \in B \cup \{\infty\},\, n \in \mathbb{N}_0\}$ genau dann, wenn f eine rationale Funktion mit $P(f) \subset B$ ist.

A40: Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Zeigen Sie: Für $f, g \in R_A(K)$ ist auch $f \cdot g \in R_A(K)$.