J. Müller

WiSe 2019/2020
30.10.2019

1. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $f \in H(\Omega)$.

(ii) $f \in C^1(\Omega)$ und für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt

$$\partial_{(u,v)} f = (u + iv) \cdot \partial_{(1,0)} f,$$

wobei (mit t reell)

$$(\partial_{(u,v)} f)(a) := \lim_{t\to 0} \big(f(a + t(u, v)) - f(a)\big)/t$$

die Ableitung von f in Richtung (u, v) an a bezeichnet.

(iii) $f \in C^1(\Omega)$ und $\partial_{(0,1)} f = i \cdot \partial_{(1,0)} f$.

Überlegen Sie sich, dass dann auch $f' = \partial_{(1,0)} f$ gilt.

A2: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $(H(G), +, \cdot)$ (mit punktweise definierter Addition und Multiplikation) ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement ist.

A3: a) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist f eine Stammfunktion zu g in G, so gilt

$$\int_\gamma g = f(b) - f(a)$$

für alle Wege γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b.

b) Es seien $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und $g(z) = z^k$ für $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Berechnen Sie $\int_\gamma g$ für alle Wege γ in $\mathbb{C}^*$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b.

A4: (Logarithmusreihe) Es sei $G := \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ und $g(z) := 1/(1 - z)$ für $z \in G$. Überlegen Sie sich, dass genau eine Stammfunktion f zu g auf G existiert mit $f(0) = 0$ und bestimmen Sie die Taylor-Koeffizienten $c_k(f, 0)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Für $z \in \mathbb{D}$ gilt $g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$. Betrachten Sie die gliedweise integrierte Reihe.