Jürgen Müller

Funktionentheorie

Skriptum zur Vorlesung Sommersemester 2024
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Funktionen und Cauchyintegrale

Im ersten Abschnitt untersuchen wir (kurz) analytische Funktionen und definieren dann Cauchyintegrale als typisches Beispiele. Zunächst einige Bezeichnungen: Für $a \in \mathbb{K}$ und $0 \leq \rho \leq \infty$ schreiben wir

$$U_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |z - a| < \rho\}$$

und

$$B_\rho(a) := \{x \in \mathbb{K} : |x - a| \leq \rho\}, \quad K_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho\}$$

sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kurz $\mathbb{D} := U_1(0)$ und $\mathbb{S} := K_1(0)$. Ist X eine Menge $f : X \to \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$Z(f) := \{a \in X : f(a) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen von f.

Bemerkung und Definition 1.1 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **analytisch** an $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (c_k) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < R)$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(a) \cap X$ [1] mit

$$c_k = f^{(k)}(a)/k! =: c_k(f, a) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wieder heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in X$ ist. Ist f analytisch an a, so nennt man (mit $\min \varnothing := \infty$)

$$\operatorname{ord}(f, a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(f, a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von f an a. Ist a eine Nullstelle von f, so ist $\operatorname{ord}(f, a) > 0$.

Bemerkung 1.2 Es sei f analytisch an der Stelle a. Ist $\operatorname{ord}(f, a) = \infty$, so ist $c_k(f, a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a + h) = 0$ für $|h| < R$. Ist andererseits $n := \operatorname{ord}(f, a) < \infty$, so ist

$$f(a + h) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f, a) h^k = h^n \varphi(h)$$

mit $\varphi(h) := \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+n}(f, a) h^m$ für $|h| < R$. Dabei ist $\varphi(0) = c_n(f, a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $\varphi(h) \neq 0$ auf einer Umgebung U von 0. Also ist f nullstellenfrei auf einer Umgebung von a bis auf die (mögliche) Ausnahmestelle a. Damit sieht man:
Ist $a \in Z(f)$, so ist also entweder f lokal konstant $= 0$ an a [2] oder a ein isolierter Punkt von $Z(f)$.

[1] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.26
[2] f heißt lokal konstant an a, falls f auf einer Umgebung von a konstant ist.

Definition 1.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. (X, d) heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$, so ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.

2. $M \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls (M, d_M) zusammenhängend (oder $M = \varnothing$) ist.[3]

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X und $\varnothing$ die einzigen in (X, d) offen und abgeschlossenen Mengen sind. Eine Menge $G \subset X$ heißt **Gebiet**, falls G nichtleer, offen und zusammenhängend ist.[4]

Satz 1.4 (Identitätssatz)
Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Hat $Z(f - g)$ einen Häufungspunkt in G, so ist schon $f = g$.[5]

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $g = 0$ zu beweisen (ansonsten betrachte man $f - g$ statt f).
Da $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist $Z(f)$ abgeschlossen in G. Ist $A \subset G$ die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ in G, so ist $A \subset Z(f)$ und A abgeschlossen in G.[6] Ist $A \neq \varnothing$ und $a \in A$, so ist a nach Bemerkung 1.2 ein innerer Punkt von A. Also ist A auch offen in G. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f = 0$. □

Bemerkung und Definition 1.5 Es sei

$$\varphi(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t = (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [-\pi, \pi]).$$

Dabei ist $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = -1$ sowie $\varphi|_{(-\pi,\pi]}$ injektiv mit $\varphi((-\pi, \pi]) = \mathbb{S} \setminus \{-1\}$. Wir schreiben $R(\mathbb{S})$ für die Menge der Funktionen $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ \varphi$ eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist. Dann gilt $C(\mathbb{S}) \subset R(\mathbb{S})$.[7] Für $f \in R(\mathbb{S})$ setzen wir

$$\int f\, dm := \int f(\zeta)\, dm(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \varphi)(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt.$$

Dann gilt

$$\int \zeta^k\, dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0 \\ -ie^{ikt}/k\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{falls } k \neq 0 \end{cases}. \tag{1.1}$$

---

[3]Dabei bezeichnet d_M die Spurmetrik auf M.
[4]Einige Ergebnisse in diesem Kontext finden sich im Anhang A
[5]Insbesondere ist im Falle $f \neq 0$ damit $Z(f)$ eine diskrete Menge in G.
[6]Für die Begrifflichkeiten siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Seite 30.
[7]Für einen metrischen Raum (X, d) bezeichnet $C(X)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$.

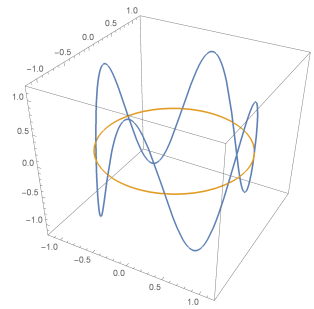

Abbildung 1: $\mathrm{Re}(\zeta^4) = \cos(4t)$ mit $\zeta = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.

Bemerkung 1.6 Es sei $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig. Existiert eine Stammfunktion $G : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ von g, so erhält man aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$i \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})e^{it}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (g \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (G \circ \varphi)'(t)\, dt = (G \circ \varphi)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

und damit

$$\int g(\zeta)\zeta\, dm(\zeta) = 0. \tag{1.2}$$

Während für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Funktion $z \mapsto z^k/k$ Stammfunktion von $z \mapsto z^{k-1}$ auf $\mathbb{C}$ ist, ergibt sich aus (1.2) in Verbindung mit (1.1) dass, die Funktion $\zeta \mapsto 1/\zeta$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{S}$ hat!

Man kann leicht zeigen, dass die Exponentialfunktion exp eine in $\mathbb{C}$ analytische Funktion ist ([Ü]). Damit sind etwa auch die trigonometrischen Funktionen cos und sin analytisch in $\mathbb{C}$. Wir betrachten nun eine für die Funktionentheorie zentrale Klasse analytischer Funktionen.

Definition 1.7 Für $f \in R(\mathbb{S})$ sei die Funktion $Cf : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(Cf)(z) := \int \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S})\,.$$

Cf heißt **Cauchyintegral** von f.

Satz 1.8 *Es sei $f \in R(\mathbb{S})$. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt*

$$(Cf)(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < 1 - |a|)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{k!}(Cf)^{(k)}(a) = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,. \tag{1.3}$$

Insbesondere ist Cf analytisch in $\mathbb{D}$.

Beweis. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt
$$\frac{1}{|1-a\overline{\zeta}|} \leq \frac{1}{1-|a|} \tag{1.4}$$
für beliebiges $\zeta \in \mathbb{S}$. Ist nun $|h| < 1-|a|$, so ergibt sich mit geometrischer Reihe

$$\frac{1}{1-(a+h)\overline{\zeta}} = \frac{1}{1-a\overline{\zeta}} \cdot \frac{1}{1-\frac{h\overline{\zeta}}{1-a\overline{\zeta}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\zeta}^k}{(1-a\overline{\zeta})^{k+1}}\, h^k$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{S}$ (bei festen a, h) nach dem Weierstraß-Kriterium. Durch Vertauschung von Summation und Integration erhält man

$$(Cf)(a+h) = \int \frac{f(\zeta)}{1-(a+h)\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k \qquad (|h| < 1-|a|)$$

mit

$$c_k = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1-a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Da $a \in \mathbb{D}$ beliebig war, ist Cf analytisch in $\mathbb{D}$. □

Bemerkung 1.9 Für $a = 0$ erhält man aus (1.3)

$$(Cf)^{(k)}(0) = k! \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und mit (1.1) damit insbesondere
$$C(1|_{\mathbb{S}}) = 1|_{\mathbb{D}}.$$

Außerdem ergibt sich die wichtige **Cauchysche Ungleichung**

$$|(Cf)^{(k)}(0)| \leq k! \sup_{\mathbb{S}} |f|.$$

Schließlich folgt aus (1.4) und (1.3) die verallgemeinerte Cauchysche Ungleichung

$$|(Cf)^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{(1-|a|)^{k+1}} \sup_{\mathbb{S}} |f| \qquad (a \in \mathbb{D}), \tag{1.5}$$

Definition 1.10 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar, so nennt man f **holomorph**. Wir setzen $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}$.

Satz 1.11 (Cauchysche Integralformel)
Es seien $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $a \in \mathbb{D}$. Ist $f|_{\mathbb{D}\setminus\{a\}}$ holomorph, so gilt

$$f(a) = \int \frac{f(\zeta)}{1-a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = (Cf)(a).$$

Beweis. Wir definieren $\varphi : [0,1] \times \mathbb{S}$ durch

$$\varphi(\lambda, \zeta) := \frac{f(a + \lambda(\zeta - a))}{1 - a\overline{\zeta}} \qquad (\lambda \in [0,1],\, \zeta \in \mathbb{S})$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int \varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Da φ stetig ist, ist ist Φ stetig auf $[0,1]$ (Stetigkeit von Parameterintegralen). Da zudem $\zeta \mapsto f(a + \lambda(\zeta - a))/\lambda$ für jedes $\lambda \in (0,1)$ eine Stammfunktion zu $\zeta \mapsto f'(a + \lambda(\zeta - a))$ auf $\mathbb{S}$ ist, ergibt sich mit Differenzierbarkeit von Parameterintegralen und (1.2)

$$\Phi'(\lambda) = \int \partial_1 \varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) = \int f'\big(a + \lambda(\zeta - a)\big)\, \zeta\, dm(\zeta) = 0 \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Damit ist Φ konstant auf $[0,1]$ und folglich wegen $C(1|_{\mathbb{S}}) = 1|_{\mathbb{D}}$

$$\int \frac{f(\zeta)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = \Phi(1) = \Phi(0) = \int \frac{f(a)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = f(a)(C1)(a) = f(a).$$

$\square$

Bemerkung 1.12 Ist $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $f|_{\mathbb{D}}$ holomorph, so gilt $f|_{\mathbb{D}} = (Cf)|_{\mathbb{D}}$ nach Satz 1.11. Mit Bemerkung 1.7 ist daher f analytisch in $\mathbb{D}$ und $f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k$ für alle $|h| < 1 - |a|$ mit

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

also insbesondere

$$f^{(k)}(0) = k! \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass aus der Holomorphie einer Funktion (also der stetigen Differenzierbarkeit im Komplexen) schon die Analytizität folgt.

Satz 1.13 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und $a \in \Omega$. Dann gilt*

$$f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}\, h^\nu \qquad (|h| < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega))$$

und die Mittelwertformel

$$f(a) = \int f(a + \rho\zeta)\, dm(\zeta) \qquad (0 < \rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)).$$

Beweis. Für $\rho < R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ sei $g = g_\rho \in C(\overline{\mathbb{D}})$ definiert durch

$$g(w) := f(a + \rho w) \qquad (|w| \le 1).$$

Dann ist $g|_{\mathbb{D}}$ holomorph. Mit Bemerkung 1.12, angewandt auf g, ergibt sich

$$f(a+h) = g\left(\frac{h}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(0)}{k!}\frac{h^k}{\rho^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^\nu \quad (|h| < \rho).$$

Da $\rho < R$ beliebig war, gilt die Darstellung für $|h| < R$ und da $a \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. Außerdem ist

$$f(a) = g(0) = \int g(\zeta)\, dm(\zeta) =) \int f(a + \rho\zeta)\, dm(zeta).$$

□

Bemerkung und Definition 1.14 Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ nennt man auch eine **ganze Funktion**. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen.[8] Bei ganzen Funktionen ist für jedes $a \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius $\operatorname{dist}(a, \varnothing) = \infty$. Mit der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich der **Satz von Liouville**: Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant ([Ü]).

Bemerkung 1.15 (lokales Maximumprinzip) Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$, so ergibt sich für $a \in \Omega$ und $0 \le \rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Taylorreihe auf $a + \rho\mathbb{S}$ und $|f|^2 = f\overline{f}$ mit (1.1) die **Parsevalsche Gleichung**

$$\int |f(a+\rho\zeta)|^2\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} c_\nu \overline{c_\mu} \rho^\nu \rho^\mu \int \zeta^{\nu-\mu}\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 \rho^{2\nu}\,.$$

Hat $|f|$ an a ein lokales Maximum, so ist $|f(a)| \ge |f(a+\rho\zeta)|$ für genügend kleine $\rho > 0$ und $\zeta \in \mathbb{S}$, also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 \rho^{2\nu} = \int |f(a+\rho\zeta)|^2\, dm(\zeta) \le |f(a)|^2 \int dm = |f(a)|^2 = |c_0|^2\,.$$

Also ist $c_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit f lokal konstant an a.

Satz 1.16 *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$ an keiner Stelle lokal konstant, so ist f offen.*[9]

[8] Ist f ganz, so ist $(f, \mathbb{C})$ ein diskretes dynamisches System.

[9] f heißt offen, falls Bilder offener Mengen offen sind.

Beweis. Es seien $a \in \Omega$ und $w = f(a)$. Es reicht zu zeigen, dass zu jedem (genügend kleinen) $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(w) \subset f(B_r(a))$. Da die w-Stellen von f isoliert sind, können wir $r > 0$ so klein wählen, dass $f(z) - w \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Wegen der Kompaktheit von $f(a + r\mathbb{S})$ ist

$$\delta := \operatorname{dist}(w, f(a + r\mathbb{S}))/2 > 0\,.$$

Es sei nun $u \in U_\delta(w)$. Für $z \in a + r\mathbb{S}$ gilt dann

$$|f(z) - u| = |f(z) - w - (u - w)| \geq |f(z) - w| - |u - w| > \delta\,.$$

Weiter sei $z \in B_r(a)$ so, dass $|f(z) - u| = \min |f - u|(B_r(a))$. Dann gilt

$$|f(z) - u| \leq |f(a) - u| = |w - u| < \delta.$$

Wir zeigen, dass $f(z) = u$ gilt. Angenommen, nicht. Nach dem Maximumprinzip, angewandt auf $1/(f - u)|_{U_r(a)}$, muss dann $z \in a + r\mathbb{S}$ gelten. Also ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist $u = f(z) \in f(B_r(0))$. $\square$

A Etwas Topologie

Wir stellen hier einige Ergebnisse aus der Topologie zusammen.

Bemerkung und Definition A.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man sieht leicht ([Ü]), dass eine Teilmenge von M genau dann offen in (M, d_M) ist, wenn sie von der Form $U \cap M$ für eine in (X, d) offene Menge U ist. Also ergibt sich aus Definition 1.3, dass $M \subset X$ genau dann unzusammenhängend ist, wenn offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$. Man kann leicht zeigen ([Ü]), dass dies äquivalent dazu ist, dass M zerlegt werden kann in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\overline{A} \cap B = \varnothing$ und $\overline{B} \cap A = \varnothing$.

Bemerkung A.2 Sind X, Y metrische Räume, ist X zusammenhängend und ist $f : X \to Y$ lokal konstant, so ist f konstant.

> Denn: Es sei $c \in f(X)$. Dann ist $A := \{x : f(x) = c\}$ nichtleer, abgeschlossen (da f stetig ist) und offen (da f lokal konstant ist). Also ist $A = X$.

Satz A.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c)$ und $V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \varnothing, \quad V \cap M \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \varnothing\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
$\Leftarrow$: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$. Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \varnothing$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \varnothing$. Widerspruch. Damit gilt $\xi \notin V$. Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz A.4 *Es seien (X, d), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Dann existieren eine in (Y, d_Y) offene Menge U und eine in (Y, d_Y) abgeschlossene Menge A mit $B = U \cap f(X) = A \cap f(X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(B) = f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in (X, d) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \varnothing$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. □

Als Konsequenz aus Satz A.3 und Satz A.4 erhalten wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz A.5 *Es sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis. Nach Satz A.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also nach Satz A.3 ein Intervall. □

Bemerkung A.6 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind A_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, so ist $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

> Denn: Wir setzen $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \neq \varnothing$ sowie $A \cap V \neq \varnothing$. Ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. Ohne Einschränkung sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Aus $x \in A_\alpha \cap U$ folgt auch $A_\alpha \cap U \neq \varnothing$. Da A_α zusammenhängend ist, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \varnothing$. Damit ist auch $A \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Bemerkung und Definition A.7 Nach Satz A.3 ist $G \subset \mathbb{R}$ genau dann ein Gebiet, wenn G ein offenes Intervall ist. Da Strecken $[u, v] \subset \mathbb{C}$ nach den Sätzen A.3 und A.4 zusammenhängend sind, sind sternförmige offene Mengen $X \subset \mathbb{C}$ nach Bemerkung A.6 zusammenhängend, also Gebiete (falls nichtleer).

Bemerkung und Definition A.8 Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Dann heißt M **pfadzusammenhängend**, falls zu allen Punkten $x, y \in M$ ein Pfad γ in M existiert mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.

Satz A.9 *Es sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Ist M pfadzusammenhängend, so ist M auch zusammenhängend.*
2. *Ist M offen und zusammenhängend, so ist M auch pfadzusammenhängend.*

Beweis. 1. Es sei $a \in M$ fest. Dann existiert zu jedem $z \in M$ ein Pfad $\gamma(z)$ in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt z. Damit ist $M = \bigcup_{z\in M} \gamma(z)^*$. Da $\gamma(z)^*$ zusammenhängend ist und $a \in \bigcap_{z\in M} \gamma(z)^*$ gilt, ist M nach Bemerkung A.6 zusammenhängend.
2. Es seien $a \in M$ fest und A die Menge aller $z \in M$ so, dass ein Pfad $\gamma(z)$ in M existiert mit Endpunkt z und Anfangspunkt a. Ist $z \in A$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset M$. Ist $w \in U_\delta(z)$, so ist $(\gamma(z), s_z^w)$ ein Pfad in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt w. Also ist A offen in M. Die gleiche Überlegung liefert auch die Abgeschlossenheit von A in M. Da $A \neq \varnothing$ ist (beachte: $a \in A$), folgt $A = M$. □

Bemerkung und Definition A.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ heißt

$$G(x) = G_X(x) := \bigcup\{A \subset X : x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

Zusammenhangskomponente oder kurz **Komponente** von X bezüglich x. Nach Bemerkung A.6 ist $G(x)$ zusammenhängend. Außerdem gilt für $x, y \in X$ entweder $G(x) = G(y)$ oder $G(x) \cap G(y) = \varnothing$. Also ist $(G(x))_{x\in X}$ eine Zerlegung von X in maximale zusammenhängende Teilmengen. Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so ist auch $G_X(x)$ offen für alle $x \in X$ ([Ü]). Also ist jede Komponente von X offen und damit ein Gebiet.