J. Müller

Wintersemester 2018/2019
21.11.2018

4. Übung zur Funktionalanalysis

A14: a) Es seien X ein linearer Raum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ Normen auf X. Zeigen Sie: Sind $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, \|\cdot\|')$ Banachräume und existiert ein $c > 0$ mit

$$\|x\|' \leq c\|x\| \qquad (x \in X),$$

so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent.

b) Es seien (S, d) ein kompakter metrischer Raum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C(S)$ so, dass $\big(C(S), \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum ist und die Auswertungsfunktionale

$$C(S) \ni f \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$$

für alle $t \in S$ stetig sind. Zeigen Sie: Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent.

A15: Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Ist $X \subset Y$, so schreiben wir $X \hookrightarrow Y$ (X stetig eingebettet in Y), falls $j : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$

$$j(x) := x \qquad (x \in X)$$

stetig ist. Zeigen Sie:

a) Ist X ein Banachraum mit $X \hookrightarrow Y$, $X \neq Y$, so ist X von 1. Kategorie in Y.

b) Ist $1 \leq p \leq q \leq \infty$, so gilt $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$.

c) Für $p < q$ ist ℓ_p von 1. Kategorie in ℓ_q.

A16: Es seien $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(t) := \sqrt{t^2 + 1/n} \qquad \big(t \in [-1, 1]\big).$$

Überlegen Sie sich: Es gilt $f_n \to |\cdot|$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ und $f_n' \to \operatorname{sign}$ in $L_2[-1, 1]$.