J. Müller

Wintersemester 2018/2019
07.11.2018

2. Übung zur Funktionalanalysis

A6: Es sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) Die Summierbarkeit von $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ impliziert die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$.

b) Die Folge $\big((-1)^j/j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ ist nicht summierbar.

A7: Es seien X ein normierter Raum und $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X^I$ summierbar. Beweisen Sie:

a) (x_α) ist abklingend, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $F_\varepsilon \subset I$ so, dass $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ für alle $\alpha \in I \setminus F_\varepsilon$.

b) $\{\alpha \in I : x_\alpha \neq 0\}$ ist abzählbar.

A8: Informieren Sie sich über das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren und intepretieren Sie die entsprechende Iterationsvorschrift im Sinne des Projektionssatzes.

A9: Es sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie:

a) Existiert eine abzählbare Menge $A \subset X$ so, dass $\operatorname{span}(A)$ dicht in X ist, so ist X separabel.

b) c_0 ist separabel, aber ℓ_∞ nicht.