J. Müller

WS 2021/22
25.11.2021

5. Übung zur Vorlesung Fourier-Transformationen und Fourier-Reihen

A15: Es seien $1 \leq p < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\|S_n\|_{L_p(m),L_p(m)} \leq \|D_n\|_1$.

b) Ist F_N der N-te Fejér-Kern, so gilt $S_n(F_N) \to D_n$ für $N \to \infty$ in $L_p(m)$.
Hinweis: Beachten Sie, dass $s_n(D_k) = s_k(D_n)$ für alle k, n gilt.

c) Im Fall $p = 1$ gilt Gleichheit in a).

A16: (Geichverteilungssatz von Weyl) Es seien $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$ und

$$B_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbb{S} : \arg z \in [\alpha, \beta]\}.$$

Weiter seien $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\zeta = e^{2\pi i\theta}$. Beweisen Sie: Für alle $z \in \mathbb{S}$ gilt

$$\frac{1}{n+1}\#\{j \in 0, \ldots, n : \zeta^j z \in B_{\alpha,\beta}\} \to m(B_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi}(\beta - \alpha) \quad (n \to \infty).$$

Hinweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Funktionen $f_\varepsilon^+, f_\varepsilon^- \in C(\mathbb{S})$ so, dass $f_\varepsilon^- \leq 1_{B_{\alpha,\beta}} \leq f_\varepsilon^+$ und $\int (f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-)\, dm < \varepsilon$.

A17: Es sei $T_k(x) := \cos(k \arccos x)$ für $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x) \qquad (x \in [-1, 1]).$$

b) Ist μ wie in Bemerkung 2.15, so ist $(\sqrt{2}\, T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L_2(\mu)$.