

12. Hausübung zur Einführung in die Mathematik

Abgabe: Bis Mittwoch, 10.02.2021, 10.00 Uhr, in Stud.IP, Ordner „Abgabe 12. Hausübung“

H34: Beweisen Sie:

a) Für $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $\sin'(s) = \sqrt{1 - \sin^2(s)}$.

b) Für $t \in (-1, 1)$ gilt $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ableitungen der beiden Funktionen gleich sind.

H35: Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, Monotonie und Extremstellen.H36: a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = f$, so ist $f = c \cdot \exp$ mit $c := f(0)$.Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) := f(z)e^{-z}$ konstant auf \mathbb{C} ist.b) Beweisen Sie unter Verwendung von a) noch einmal die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $e^{z+w} = e^z e^w$.