

**9. Gruppenübung zur Analysis einer und mehrerer Veränderlicher**

G25: Sind  $X$  eine Menge,  $c \in \mathbb{R}$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , so heißt

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : f(x) = c\}$$

die Höhenlinie zum Niveau  $c$ . Rechnen Sie für  $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = xy$  nach, dass

Gradient  $\perp$  Höhenlinie

in jedem Punkt  $(x, y)$  gilt, d. h. der Gradient und die Tangente an die betreffende Höhenlinie stehen senkrecht aufeinander.

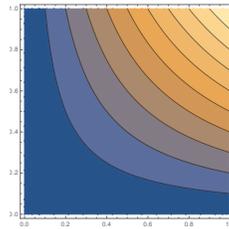


Abbildung 1: Höhenlinien von  $f$

G26: Es seien  $(X, d)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Zeigen Sie: Für alle in  $Y$  abgeschlossenen Mengen  $B$  ist  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen in  $X$ .

G27: (Ellipsen) Für  $a, b > 0$  sei

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}.$$

Entscheiden Sie, welche der Mengen  $M$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus M$  sowie  $M \cap (0, \infty)^2$  offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt in  $\mathbb{R}^2$  sind.