J. Müller

WS 2017/2018
13.12.2017

8. Übung zur Elementaren Zahlentheorie und Algebra

A34: Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $O_m := \{A \in GL_m(\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$. Zeigen Sie:

a) O_m ist eine Untergruppe von $GL_m(\mathbb{R})$ und $O_m^+ := \{A \in O_m : \det A = 1\}$ ein Normalteiler von O_m.

b) Im Falle $m > 1$ ist $O_m/O_m^+ \simeq (\{\pm 1\}, \cdot, 1)$.

A35: Es sei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zeigen Sie: Für die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +, 0)$ und die multiplikative Gruppe $(\mathbb{T}, \cdot, 1)$ gilt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.

A36: Es seien K ein Körper und

$$G := \left\{ A_{s,t} = \begin{bmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2} : s \in K^*, t \in K \right\}.$$

Beweisen Sie:

a) G ist eine Untergruppe von $GL_2(K)$.

b) $N := \{A_{1,t} : t \in K\}$ ist Normalteiler von G und $G/N \simeq (K^*, \cdot, 1)$.

c) $N \simeq (K, +, 0)$.

A37: Es seien $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $G = (\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \simeq (0, \infty)$,

(ii) $\mathbb{C}^*/V_m \simeq \mathbb{C}^*$, wobei $V_m := \langle e^{2\pi i/m} \rangle$ für $m \in \mathbb{N}$.