J. Müller

WS 2017/2018
08.11.2017

# 3. Übung zur Elementaren Zahlentheorie und Algebra

A11: Zeigen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

a) $\alpha_p(nm) = \alpha_p(n) + \alpha_p(m)$ $(p \in \mathbb{P})$,

b) $n|m \Leftrightarrow \alpha_q(n) \leq \alpha_q(m)$ $(p \in \mathbb{P})$,

c) $\alpha_p\big(\mathrm{ggT}(n,m)\big) = \min\big\{(\alpha_p(n), \alpha_p(m)\big\}$ $(p \in \mathbb{P})$.

A12: a) Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist

$$d(m) := \#\{k \in \mathbb{N} : k|m\} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (\alpha_p(m) + 1)\,.$$

b) Mit $p_1 := 2$ sei $p_{k+1} := \min\{p \in \mathbb{P} : p > p_k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ (man nennt dann $p_k$ die $k$-te Primzahl). Bestimmen Sie $d(m_n)$ für

$$m_n := \prod_{j=0}^{n-1} p_{j+1}^{n-j} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Woher kennt man $m_2$ und $m_3$?

A13: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt quadratfrei, falls aus $d \in \mathbb{N}, d^2|n$ schon $d = 1$ folgt. Beweisen Sie:

a) $n$ ist genau dann quadratfrei, wenn $a_p(n) \in \{0, 1\}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt.

b) Jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich faktorisieren als $n = mk^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ und quadratfreiem $m \in \mathbb{N}$.

A14: Beweisen Sie: Für alle $n, a \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \#\{k \in \{1, \ldots, n\} : a|k\},$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet.

A15: a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Sind $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p \leq q$, so ist $\alpha_p(n!) \geq \alpha_q(n!)$.

b) Es sei $p_{306}$ die 306-te Primzahl. Auf wie viele Nullen endet die Zahl $p_{306}!$ im Dezimalsystem?