

12. Übung zur Analysis II**Gruppenübungen**

G28: a) Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times d}$ gilt

$$\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \|A\| \leq d\sqrt{m} \cdot \max_{j,k} |a_{jk}|.$$

b) Zeigen Sie: Ist $B \in \mathbb{K}^{d \times d}$ mit $\|B\| < 1$, so ist $E - B$ invertierbar, und es gilt

$$(E - B)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B^{\nu}.$$

G29: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \left((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right).$$

Zeigen Sie:

- i) f ist lokal umkehrbar für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- ii) Es existiert keine offene Umgebung U von $(0, 0)$ so, dass $f|_U$ bijektiv ist.

G30: Es sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right),$$

und es sei $(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

i) Zeigen Sie:

Es gibt eine offene Umgebung U von x_0 , eine offene Umgebung W von (x_0, y_0) und eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass für $(x, y) \in W$ gilt:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } y = f(x).$$

- ii) Bestimmen Sie die Funktion f mit einem geeigneten Definitionsbereich U .
- iii) Berechnen Sie $f'(x)$ mit Satz 17.6.