

11. Übung zur Analysis I

Abgabe: Montag, 30.01.2006, vor der Vorlesung

**Gruppenübungen**G28: Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

stetig ist.

G29: Untersuchen Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

auf Existenz von Grenzwerten und auf Stetigkeit.

G30: Zeigen Sie: Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \frac{1 - \cos x}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

**Hausübungen**H31: Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, und es sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M \subset X$ . Zeigen Sie: Ist  $f$  stetig an  $x_0$  mit  $f(x_0) > 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  so, dass  $f(x) > 0$  für alle  $x \in M$  mit  $d(x, x_0) < \delta$  gilt.H32: Untersuchen Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

auf Existenz von Grenzwerten und auf Stetigkeit.

H33: Zeigen Sie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$