

## Vorlesung

### Wahrscheinlichkeitstheorie

#### I Diskrete Modelle, projektiver Limes von W-Maßen, stochastische Unabhängigkeit

##### 0 Diskrete Modelle

Grundbegriffe der Kombinatorik, Permutationen mit Wiederholung, Permutationen ohne Wiederholung, Kombinationen mit/ohne Wiederholung, Urnenmodell, Fußball-Toto, Zahlenlotto, Stirlingsche Formel, Milchstraße, Laplace-Verteilung, Diskrete Gleichverteilung, Ergebnisraum, Ereignisse, Ergebnisse, Geburtstags-Paradoxon, Siebformel von Sylvester-Poincaré, Diskrete Verteilungen, Rencontre-Problem, Zähldichte, diskreter Träger, Koinzidenzverteilung, Poisson-Verteilung  $Poi(\lambda)$ , Qualitätskontrolle/Urnenmodell, hypergeometrische Verteilung  $H(N, M, n)$ , Bernoulli-Experiment, Binomialverteilung  $B(n, p)$ .

##### 1 Projektiver Limes (Kolmogorov)

Produkt- $\sigma$ -Algebra, messbare Rechteckmengen, Zylindermengen, endlich dimensionale Randverteilungen,  $C(I)$  ist nicht  $\mathcal{B}(\mathbb{R})^I$ -messbar, Konsistenzbedingung/Projektivität, Radon-Maß, projektiver Limes, Produktmaß, stochastische Prozesse.

##### 2 Elementare bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit, Multiplikationsformel, Zerlegungssatz/Formel für a priori Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes, gestörter Nachrichtenkanal

##### 3 Stochastische Unabhängigkeit, Korrelation

Stochastisch unabhängige Familien von Mengensystemen, Unabhängigkeit von Erzeugern, Zusammenlegen/Blockbildung, unabhängige Familien von Zufallsvariablen, Unabhängigkeit und Produktmaße, Randverteilungen, Randdichten, Existenz unabhängiger Folgen von Zufallsvariablen, Faltung, Multiplikationssatz, Wartezeitproblem, geometrische Verteilung, Minima, Sicherheit von Atomreaktoren, Kovarianz, Korrelationskoeffizient,  $d$ -dimensionale Normalverteilung Kovarianzmatrix.

##### 4 0-1-Gesetze

Terminale  $\sigma$ -Algebra, Kolmogorovs 0-1-Gesetz, terminale Zufallsvariable, Borel-Cantelli-Lemma, Murphys law.

#### II Gesetze der großen Zahlen für unabhängige Zufallsvariable

##### 5 Konvergenz von Zufallsvariablen

Stochastische Konvergenz für reelle Zufallsvariable, fast sichere Konvergenz, Charakterisierung der fast sicheren Konvergenz, fast sichere Konvergenz impliziert die stochastische Konvergenz, Teilfolgenkriterium für stochastische Konvergenz, Stabilität der stochastischen Konvergenz, ein Cauchy-Kriterium für fast sichere

Konvergenz,  $\mathcal{L}^p$ -Konvergenz impliziert die stochastische Konvergenz, gleichgradige Integrierbarkeit, Charakterisierung der gleichgradigen Integrierbarkeit,  $\mathcal{L}^p$ -Beschränktheit für ein  $p > 1 \Rightarrow$  gleichgradige Integrierbarkeit  $\Rightarrow \mathcal{L}^1$ -Beschränktheit, gleichgradige Integrierbarkeit und  $\mathcal{L}^p$ -Konvergenz.

## 6 SLLN

Starkes Gesetz der großen Zahlen, Zweireihensatz, Ungleichung von Kolmogorov, Lemma von Toeplitz, Cèsaro, Kronecker, diskrete Regel von de l'Hospital, starkes Gesetz in  $\mathcal{L}^2$ , Kolmogorov-Bedingung, klassisches starkes Gesetz (SLLN = strong law of large numbers), SLLN von Kolmogorov, empirische Varianz, MC-Methode, Approximationssatz von Weierstraß.

## III Verteilungskonvergenz, Zentraler Grenzwertsatz für unabhängige Zufallsvariable

### 7 Verteilungskonvergenz

Schwache Konvergenz von W-Maßen auf  $\mathbb{R}$ , Verteilungskonvergenz von reellen ZV, stochastische Konvergenz vs Verteilungskonvergenz, Portmanteau-Theorem (Handkoffer), Quantilfunktion, Skorokhod-Darstellung, konvergenzbestimmende Klassen, bestimmende Klassen für  $M^1(\mathbb{R})$ , Zufällige Quantisierung, Stabilitätseigenschaften der Verteilungskonvergenz, W-Maße mit Dichten.

### 8 Fourier-Transformation, charakteristische Funktionen

Integration komplexer Funktionen,  $\mathcal{L}_q^1(\mu)$ , Fourier-Transformierte von W-Maßen auf  $\mathbb{R}$ , charakteristische Funktion reeller ZV, Fourier-Transformierte der Poisson-Verteilung, Eigenschaften von Fourier-Transformierten, Fourier-Transformierte der Normalverteilung, Gleichung von Parseval, Eindeutigkeitssatz, Stetigkeitssatz, Differenzierbarkeit und Momente, Fourier-Transformierte von W-Maßen auf  $\mathbb{R}^d$  und d-dimensionale Normalverteilung, momenterzeugende Funktion.

### 9 CLT

Zentraler Grenzwertsatz in  $\mathcal{L}^2$  (CLT = central limit theorem), klassischer CLT im iid-Fall, de Moivre und Laplace, Analysis via Stochastik, einfache Irrfahrt in  $\mathbb{Z}$ , Spiegelungsprinzip, Gesetz vom iterierten Logarithmus (LIL).

## IV Stochastische Abhängigkeit

### 10 Bedingte Erwartungswerte

Elementarer bedingter Erwartungswert, bedingter Erwartungswert  $E(X|\mathcal{F})$  oder  $E(X|Y)$ , RN-Gleichung, Existenz, Eigenschaften (Monotonie, Linearität, tower property, taking out what is known, Jensen-Ungleichung), bedingte Versionen des Satzes von der monotonen Konvergenz, der beschränkten Konvergenz und des Fatou-Lemmas, bedingte Varianz, faktorisierter bedingter Erwartungswert  $E(X|Y = y)$ .

### 11 Bedingte Verteilungen

Bedingte Verteilung  $P^{X|Y=y}$  von  $X$  unter  $Y = y$ , RN-Gleichung, unabhängige Zufallsvariable  $X$  und  $Y$ , Transformationen, Bedingen durch Einsetzen, Existenz und Eindeutigkeit, bedingte Dichten.