

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 25.6.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 33 (2+2 Punkte)

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid $U(0, 1)$ -verteilte ZV und

$$M_n := \max_{1 \leq j \leq n} X_j.$$

Zeigen Sie:

a) $M_n \rightarrow 1$ f.s.

b) $n(M_n - 1) \xrightarrow{d} Q$, wobei $Q = f\lambda$, $f(x) := e^x \cdot 1_{(-\infty, 0)}(x)$.

Aufgabe 34 (Lemma 7.5/4 Punkte)

Seien F_n, F Verteilungsfunktionen, $n \in \mathbb{N}$, mit $F_n(x) \rightarrow F(x) \forall x \in S(F)$. Zeigen Sie:
 $F_n^{-1}(x) \rightarrow F^{-1}(x) \forall x \in S(F^{-1})$.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Sei $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wobei F_0 stetig sei.

Zeigen Sie:

$$Q_n \rightarrow Q_0 \Rightarrow \rho(F_n, F_0) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Aufgabe 36 (4+3 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} Y \Rightarrow P^{X_n} * P^{Y_n} \rightarrow P^X * P^Y$.

b) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$ (s. Satz 7.10 b)).

Hinweis zu b): Wählen Sie $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid $B(1, 1/2)$ -verteilt und definieren Sie

$$X_{2n} := Y_{2n} := Z_n, X_{2n+1} := Z_n, Y_{2n+1} := Z_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$