Stochastische Prozesse I
Übungen

Besprechungstermine: 21.11.13, 14.30 Uhr

Aufgabe 9. Beweisen Sie Lemma 2.4 der Vorlesung.

Aufgabe 10. (Ruinproblem)
$(Z_n)_{n\geq 1}$ seien iid mit $P(Z_1 = +1) = p = 1 - P(Z_1 = -1)$, $p \in (0,1), p \neq \frac{1}{2}$,
$G_n := \sum_1^n Z_i, G_0 = 0$. Ferner sei für $y, z \in \mathbb{N}$,

$$\tau := \inf\{n \geq 1 : G_n = z \text{ oder } G_n = -y\}.$$

Bestätigen Sie für die "Ruinwahrscheinlichkeit" $P(G_\tau = -y)$ und $E\tau$ die Formeln:

$$P(G_\tau = -y) = \frac{(\frac{1-p}{p})^z - 1}{(\frac{1-p}{p})^z - (\frac{p}{1-p})^y},$$

$$E\tau = \frac{z - (y+z)P(G_\tau = -y)}{2p-1}$$

Wie groß ist $P(G_\tau = -y)$ für $z = y = 100$, $p = \frac{18}{37}$?

Hinweis: Optional Sampling für das Martingal N mit $N_n = e^{\alpha G_n}, \alpha = \log(\frac{1-p}{p})$ und Beispiel 2.8.

Aufgabe 11. (Charakterisierung der Martingaleigenschaft)
X sei eine $\mathbb{F}$-adaptierte $\mathscr{L}^1$-Folge, Zeigen Sie:

X ist $\mathbb{F}$-Martingal $\Leftrightarrow EX_\tau = EX_0 \;\forall$ beschränkten $\mathbb{F}$-Stoppzeiten τ.

Hinweis: Für $n \in I($ mit $n+1 \in I), F \in \mathcal{F}_n$ ist $\tau := n1_F + (n+1)1_{F^c}$ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit.

Aufgabe 12. X sei $\mathbb{F}$-adaptiert, H $\mathbb{F}$-vorhersehbar und τ eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
(H\cdot X)^\tau &= H\cdot X^\tau = H^\tau \cdot X^\tau,\\
[X^\tau] &= [X]^\tau,\\
\langle X^\tau\rangle &= \langle X\rangle^\tau, \text{ falls } X\ \mathscr{L}^2-\text{Folge ist}.
\end{aligned}$$