H. Luschgy WS 2008/09

Blatt 7

Stochastische Prozesse I

Übungen

Besprechungstermin: 10.12.08, 12.00 Uhr und 11.12.08, 14.00 Uhr

Aufgabe 23. (CRR-Modell, 1 Periode)

Auf einem Kapitalmarkt mit 2 Anlagemöglichkeiten werden zu den Zeitpunkten $n = 0, 1$ Bonds zum Preis B_n und Aktien zum Preis A_n gehandelt. ($I = \{0, 1\}, N = 1$.) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ die Menge der denkbaren "Geschichten"des Kapitalmarktes und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Ereignisse.

P sei ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Alle denkbaren Geschichten seien auch möglich, d.h. $P(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, 2$. Es gelte $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. Die Preise des Bonds B_n und der Aktie A_n seien für $n = 0, 1$ $\mathcal{F}_n$ meßbare Zufallsvariablen mit folgenden bekannten Werten:

$B_0(\omega_i) = 1, B_1(\omega_i) = 1 + r, r = \frac{1}{9}, A_0(\omega_i) = 5,\ i = 1, 2$ und

$A_1(\omega_1) = \frac{20}{3}, A_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$.

Berechnen Sie eine Hedgingstrategie für die Europäische Call Option

$$C = (A_1 - K)^+, K = 5.$$

Aufgabe 24.

Das Modell aus Aufgabe 23 werde durch eine weitere Geschichte erweitert, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\{\omega_i\}) > 0, i = 1, 2, 3$. Dabei seien $A_1(\omega_3) = \frac{30}{9}$ und die übrigen Preise wie in Aufgabe 23. Bestimmen Sie die Menge aller Claims, für die eine Hedgingstrategie existiert.

Aufgabe 25.

Im N-Perioden-Modell (1) mit Preisprozeß (S^0, S^1) und Filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_n)_{0 \le n \le N}$ sei $C \ge 0$ die Auszahlung zum Zeitpunkt N eines hedgebaren europäischen Claims. Das Modell (1) wird erweitert durch den Handel mit zusätzlichen Finanzprodukten. Man erhält das Modell (2) mit Preisprozeß $(S^0, S^1, S^2, \ldots, S^d)$ und Filtrationen $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{0 \le n \le N}, \mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Das Modell (2) sei ein Modell mit Risikoneutralität. (Numeraire in beiden Modellen ist S^0.) Zeigen Sie für die Preise $\Pi_i(C)$ des Claims im Modell (i):

$$\Pi_1(C) = \Pi_2(C).$$

Aufgabe 26. (Bewertungsschranken für Call und Put)

Die Call-bzw. Put-Option $C = (S_N^k - K)^+$ bzw. $D = (K - S_N^k)^+$ seien hedgebar ($k \ge 1$) in einem N-Perioden-Marktmodell mit Risikoneutralität und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Bestätigen Sie die Bewertungsgrenzen:

$$S_0^k - \frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N \le \Pi(C) \le S_0^k$$

$$\frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N - S_0^k \le \Pi(D) \le \frac{K}{\beta_0} E_Q \beta_N, Q \in \mathbb{P}.$$