

Stochastic Finance

Übungen

Aufgabe 1 (Vermögensgleichung)

Im $(1 + d, k)$ -Marktmodell sei Y die eindeutige Lösung der stochastischen DGL

$$dY_t = Y_t[r_t + U_t^T(\mu_t - r_t 1_d)]dt + Y_t U_t^T \sigma_t dW_t, t \in [0, T], Y_0 \in (0, \infty)$$

(vgl. Lemma 1.2). Dabei ist U ein \mathbb{R}^d -wertiger, progressiver Prozeß mit

$$\int_0^T |U_t^T(\mu_t - r_t 1_d)| dt < \infty \text{ P-f.s.},$$

$$\int_0^T \|U_t^T \sigma_t\|^2 dt < \infty \text{ P-f.s.}$$

Zeigen Sie:

a) Die Handelsstrategie (H, K) mit

$$K^i := \frac{U^i Y}{S^i}, i = 1, \dots, d, H := \frac{(1 - \sum_{i=1}^d U^i)Y}{B}$$

ist selbstfinanzierend und

$$V(H, K) = Y.$$

b) Man erhält umgekehrt jede Strategie $(\tilde{H}, \tilde{K}) \in SF$ mit $\min_{t \in [0, T]} V_t(\tilde{H}, \tilde{K}) > 0$ P-f.s. auf die Weise von a).

Hinweis zu b): $U = \frac{\tilde{\pi}}{V(\tilde{H}, \tilde{K})}$ mit $\tilde{\pi} = \tilde{K}S$.