J. Dimitriadis
H. Luschgy

WS 2009/10
Blatt 4

Maß- und Integrationstheorie

Übungen

Abgabetermin: 26.11.2009, 12.00 Uhr, Übungskasten 22

Aufgabe 13 (Approximation/5 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}), \mu \mid \mathcal{E}$ σ-endlich.
Beweisen Sie die „Approximationseigenschaft“:
Zu $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ existiert eine Menge $C \in \mathcal{E}$ mit $\mu(A \triangle C) \leq \varepsilon$.

Hinweis: Man approximiere A mit Hilfe von Korollar 3.9 durch eine Menge der Form $\cup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathcal{E}$. Dann approximiere man diese Menge durch eine endliche Vereinigung.

Aufgabe 14 (Vervollständigung, Satz 3.15/7 Bonuspunkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum,

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0, A \subset N\} \text{ und } \mathcal{A}_\mu := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}_\mu = \{B \subset \Omega : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \subset B \subset A_2, \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$.

b) $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to \overline{I\!R}_+,\ \overline{\mu}(B) := \mu(A_2)$ (mit A_2 aus a)) ist (einziges) Maß auf $\mathcal{A}_\mu$ mit $\overline{\mu} \mid \mathcal{A} = \mu$.

c) $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ is ein vollständiger Maßraum (und heißt Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).

d) μ σ-endlich $\Rightarrow \mathcal{A}_\mu = \mathcal{M}(\mu^*), \overline{\mu} = \mu^* \mid \mathcal{A}_\mu$. Für beliebige Maße ist dies i.A. falsch.

Hinweis zu d): $\Omega = I\!R, \mathcal{A} = \{A \subset I\!R : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}, \mu(A) = \begin{cases} 0 & , \quad A = \emptyset \\ \infty & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 15 (Liouville-Zahlen/4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Menge L der Liouville-Zahlen $\lambda(L) = 0$ gilt.

Hinweis: Es genügt $\lambda(L \cap [-k, k]) = 0$ für alle $k \in I\!N$ zu zeigen. Hierzu stelle man L wie in Aufgabe 4 dar.
Bemerkung: L ist nicht abzählbar und dicht in $I\!R$.

Aufgabe 16 (3 Punkte)
Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) = \frac{\exp(\frac{x}{a})}{1 + \exp(\frac{x}{a})}, x \in I\!R \text{ (logistische Verteilung, } L(a))$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(\frac{x}{a})^b) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \text{(Weibull-Verteilung}, W(a,b))$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{a}{x})^b & , \quad x > a \\ 0 & , \quad x \leq a \end{cases} \quad \text{(Pareto-Verteilung, } Pa(a,b))$$

stetige Verteilungsfunktionen definiert werden.

Aufgabe 17 (Vergleichssatz 3.10/4 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}) = (I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ und $\mathcal{E} = \{(x, \infty) : x \in I\!R\}$. Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ und für die durch

$$\mu_2(A) := \lambda(A \cap [2, 4]) \text{ und } \mu_1(A) := \mu_2(4A)$$

auf $\mathcal{A}$ definierten Maße:

$$\mu_1|\mathcal{E} \leq \mu_2|\mathcal{E}, \text{ aber } \mu_1 \not\leq \mu_2.$$

Der Vergleichssatz 3.10 ist also falsch, falls $\mathcal{E}$ kein Semiring ist.