

## Vorlesung

### Stochastische Prozesse I (und Math. Finance)

#### I Prozesse und Modelle in diskreter Zeit

##### 1 Martingale

Stochastische Prozesse, Filtrationen, Martingale (Submartingale, Supermartingale), random walk, geometric random walk, Martingaltransformierte, vorhersehbare Folgen, Glücksspiel, Darstellungseigenschaft, Doob-Zerlegung, Kompensator, quadratische Variation, quadratische Charakteristik.

##### 2 Stopzeiten, lokale Martingale, Doob-Ungleichungen

Stopzeiten,  $\sigma$ -Algebra der  $\tau$ -Vergangenheit, erste Eintrittszeiten, gestoppte Folgen, optional stopping, optional sampling, reguläre Stopzeiten, Ruinproblem, lokalisierende Folgen von Stopzeiten, lokale Martingale, Doobsche Ungleichungen, Martingalkonvergenz.

##### 3 Markov-Prozesse (Ketten), optimales Stoppen

Übergangskerne/Markovkerne, zeitlich homogene Markov-Prozesse, stochastische dynamische Systeme, harmonische (subharmonische, superharmonische) Funktionen, optimales Stoppen, Markov-Stopprobleme.

##### 4 Preistheorie für europäische Optionen

N-Perioden Marktmodell, selbstfinanzierende Handelsstrategien, Arbitragestrategien, äquivalentes Martingalmaß (Risikoneutralität), Diskontierung, No Arbitrage Theorem, Hedge-Strategien für europäische Claims, Preisformel, Put-Call Parität, Vollständigkeit, Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes.

##### 5 CRR-Modell

Cox, Ross, Rubinstein (1979), Arbitragefreiheit, Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes, Vollständigkeit, Markoveigenschaft, Preisformel, Preisprozeß, Hedge-Strategien.

##### 6 Preistheorie für amerikanische Optionen

Hedge-Strategien für amerikanische Claims, Preisformel, Vollständigkeit, "konvexe" Claims, no early exercise, CRR-Modell.

## II Prozesse und Modelle in stetiger Zeit

### 7 Lévy-Prozesse, Brownsche Bewegung, Gauß-Prozesse

Reelle Lévy-Prozesse, Poisson-Prozeß, Brownsche Bewegung (BM, Wiener-Prozeß), Faltungshalbgruppen, unbegrenzt teilbare Verteilungen, stochastische Stetigkeit, Gauß-Prozesse, Kovarianzfunktion, äquivalente Prozesse, Modifikation, nicht unterscheidbare Prozesse, Kolmogorov-Kriterium für stetige Modifikationen, cadlag Modifikationen für Lévy-Prozesse, quadratische Variation der BM,  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung (BM <sup>$d$</sup> ).

### 8 Filtrationen

cad Filtrationen,  $\mathcal{F}_+$ -Stopzeiten, augmentierte Filtrationen,  $\mathcal{F}$ -Lévy-Prozesse,  $\mathcal{F}$ -BM.

### 9 Martingale

Doléans-Exponential der BM, geometrische BM, Martingalcharakterisierungen der BM, cadlag Modifikation.

### 10 Markov-Prozesse

Markov-Halbgruppen (HG), Brownsche HG, zeitlich homogene Markov-Prozesse, Markov-HG für Lévy-Prozesse, "Black-Scholes" HG für geometrische BM, 0-1-Gesetz von Blumenthal.

### 11 Black-Scholes Modell

Black und Scholes (1973), Samuelson (1965), diskontierter Aktienpreisprozeß, äquivalentes Martingalmaß, Satz von Girsanov (einfachster Fall), Preisprozeß für europäische Claims, Preisformel für pfadunabhängige Claims, BS-Preis für Call, Put-Call Parität, Greeks, BS-PDGL für Call, historische und implizite Volatilität.