

Exkurs C: Quantilfunktion und Quantile

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sei eine Verteilungsfunktion, d.h. also F ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Wegen dieser Eigenschaften gilt für $y \in (0, 1)$

$$(1) \quad \{F \geq y\} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} = [a, \infty) \text{ für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung

$$F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, F^{-1}(y) := \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < y\} (= a)$$

heißt **Quantilfunktion** oder verallgemeinerte Inverse von F . (Ist F injektiv mit $F(\mathbb{R}) = (0, 1)$, dann ist F^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von F . F^{-1} ist hier natürlich nicht die Urbildabbildung.) Offenbar ist F^{-1} monoton wachsend und

$$(2) \quad F(x) \geq y \Leftrightarrow F^{-1}(y) \leq x \text{ für } x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1).$$

Diese Beziehung impliziert

$$(3) \quad \begin{aligned} \{F^{-1} \leq x\} &= \{y \in (0, 1) : F^{-1}(y) \leq x\} = \{y \in (0, 1) : F(x) \geq y\} \\ &= (0, 1) \cap (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0, 1)) \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist F^{-1} Borel-messbar.

(4) F ist die Verteilungsfunktion der Verteilung

$$U(0, 1)^{F^{-1}}.$$

Beweis. Mit (3) gilt $U(0, 1)^{F^{-1}}((-\infty, x]) = U(0, 1)(\{y \in (0, 1) : F^{-1}(y) \leq x\}) = \lambda((0, 1) \cap (0, F(x)]) = F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. □

Weiter gilt

$$(5) \quad \{F > y\} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\} = \langle b, \infty \rangle ([b, \infty) \text{ oder } (b, \infty)) \text{ für ein } b \in \mathbb{R}$$

und daher

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\} (= b) \geq F^{-1}(y) \text{ für } y \in (0, 1).$$

Die linke Seite ist der rechtsseitige Grenzwert $F^{-1}(y+)$ von F^{-1} an der Stelle y :

$$(6) \quad F^{-1} \text{ ist linksseitig stetig und } F^{-1}(y+) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\}, y \in (0, 1).$$

Beweis. Seien $y_n \in (0, 1), y_n < y, y_n \uparrow y$ und $a_n = F^{-1}(y_n)$. Dann ist (a_n) eine monoton wachsende Folge und es gilt

$$\{F \geq y_n\} = [a_n, \infty), \bigcap_{n=1}^{\infty} \{F \geq y_n\} = \{F \geq y\}$$

und

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, \infty) = [a, \infty) \text{ mit } a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Es folgt $\{F \geq y\} = [a, \infty)$ und damit $F^{-1}(y) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1}(y_n)$. Dies zeigt die linksseitige Stetigkeit von F^{-1} .

Für $y_n \in (0, 1)$, $y_n > y$, $y_n \downarrow y$ ist $(a_n) = (F^{-1}(y_n))$ eine monoton fallende Folge und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{F \geq y_n\} = \{F > y\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, \infty) = \langle a, \infty) \text{ mit } a = \lim a_n.$$

Dies liefert $\{F > y\} = \langle a, \infty)$, also

$$F^{-1}(y+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{-1}(y_n) = a = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\}.$$

□

Ferner gilt noch

$$(7) \quad F(x-) \leq y \Leftrightarrow F^{-1}(y+) \geq x \text{ für } x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1).$$

Beweis. Für $z < x \leq F^{-1}(y+)$ gilt $F(z) \leq y$ und damit $F(x-) \leq y$. Umgekehrt folgt $z \geq x$ aus $F(x-) \leq y$ und $F(z) > y$. Dies impliziert mit (6)

$$F^{-1}(y+) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > y\} \geq x.$$

□

Nun sei F die Verteilungsfunktion einer Verteilung Q auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($Q = U(0, 1)^{F^{-1}}$ nach (4)). Eine reelle Zahl x heißt α -**Quantil** von Q für $\alpha \in (0, 1)$, falls

$$Q((-\infty, x]) \geq \alpha \text{ und } Q([x, \infty)) \geq 1 - \alpha.$$

Ein 1/2-Quantil heißt **Median**. Wir bezeichnen die Menge der α -Quantile von Q mit $M_\alpha = M_\alpha(Q)$. Wegen $F(x) = Q((-\infty, x])$ und $F(x-) = Q((-\infty, x))$ ist $x \in M_\alpha$ gleichbedeutend mit

$$(8) \quad F(x) \geq \alpha \text{ und } F(x-) \leq \alpha.$$

Nach (2) und (7) erhält man also

$$(9) \quad M_\alpha = [F^{-1}(\alpha), F^{-1}(\alpha+)].$$

Ist F stetig, so gilt

$$(10) \quad M_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = \alpha\}.$$

Die Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) impliziert die Konvergenz der α -Quantile. Präziser gilt:

(11) Seien Q_n, Q W -Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktionen $F_n, F, \alpha \in (0, 1)$ und $c_n \in M_\alpha(Q_n)$. Falls $Q_n \xrightarrow{d} Q$ und F^{-1} in α stetig ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = F^{-1}(\alpha) \text{ (und } M_\alpha(Q) = \{F^{-1}(\alpha)\}\text{)}.$$

Beweis. Es gilt $c := \liminf c_n \geq b := F^{-1}(\alpha)$. Andernfalls wähle man $\varepsilon > 0$ mit $c + \varepsilon \leq b - \varepsilon$ und $b - \varepsilon \in C(F) := \{x \in \mathbb{R} : F \text{ in } x \text{ stetig}\}$. Es gibt eine Teilfolge (c_{n_k}) von (c_n) mit $c_{n_k} \leq b - \varepsilon$ für alle k , woraus mit (8)

$$\alpha \leq F_{n_k}(c_{n_k}) \leq F_{n_k}(b - \varepsilon)$$

für alle k folgt. Wegen $b - \varepsilon \in C(F)$ gilt

$$F_{n_k}(b - \varepsilon) \rightarrow F(b - \varepsilon), k \rightarrow \infty.$$

Dies liefert $F(b - \varepsilon) \geq \alpha$, was zum Widerspruch

$$b = F^{-1}(\alpha) = \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} \leq b - \varepsilon$$

führt.

Es gilt $c := \limsup c_n \leq b := F^{-1}(\alpha)$. Andernfalls wähle man $\varepsilon > 0$ mit $c - \varepsilon > b + \varepsilon$ und $b + \varepsilon \in C(F)$. Es gibt eine Teilfolge (c_{n_k}) von (c_n) mit $c_{n_k} \geq c - \varepsilon$ für alle k , woraus mit (8)

$$\alpha \geq F_{n_k}(c_{n_k} -) \geq F_{n_k}(b + \varepsilon)$$

für alle k folgt. Wegen $b + \varepsilon \in C(F)$ gilt

$$F_{n_k}(b + \varepsilon) \rightarrow F(b + \varepsilon), k \rightarrow \infty.$$

Dies liefert $\alpha \geq F(b + \varepsilon)$, was zum Widerspruch

$$b = F^{-1}(\alpha) = F^{-1}(\alpha+) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\} \geq b + \varepsilon$$

führt. □