

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte)

n unterscheidbare Kugeln sollen zufällig auf drei durch die Zahlen 1, 2 und 3 gekennzeichnete Urnen verteilt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- (a) Urne 1 ist als einzige Urne leer.
- (b) Genau eine Urne ist leer.
- (c) Keine Urne ist leer.

Aufgabe 2 (3+2+2 Punkte)

Seien $X = (X_1, X_2, X_3)$ eine 3-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ und $P(X = x) = 1/4$ für alle $x \in A$.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P^{X_i} für $i = 1, 2, 3$.
- (b) Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ für $I = \{1, 2, 3\}$ unabhängig ist.
- (c) Untersuchen Sie, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $c \in \mathbb{R}$, $A = [-1, +1]^2$ und $Z = (X, Y)$ eine 2-dimensionale Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit der durch

$$f_Z(x, y) = c \cdot (1 + x \cdot y) \cdot \mathbf{1}_A(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definierten λ^2 -Dichte. Berechnen Sie c .

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $P(X = -2) = 1/5$, $P(X = -1) = 1/6$, $P(X = 0) = 1/5$, $P(X = 1) = 1/15$ und $P(X = 2) = 11/30$. Außerdem sei $Y = X^2$.

- (a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y .
- (b) Berechnen Sie $E(Y)$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien $\lambda > 0$ und X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim \mathfrak{P}(\lambda)$ und $P(Y = y) = P(X = y | X \in \mathbb{N})$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $E(Y)$.

Aufgabe 6 (4+4+2 Punkte)

Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $X \sim U(-1, 2)$ und $Y = |X|$.

- (a) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_Y .
- (b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^Y eine λ^1 -Dichte besitzt.
- (c) Berechnen Sie EY .