

9. Übung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Hinweis: Die Besprechung der Aufgaben dieses Blatts fand in der Übung am Montag, dem 07.05.2007, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 statt.

Aufgabe 41

Seien X_1, X_2 i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ mit Werten in $\{-1, 1\}$ und $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$. Außerdem sei $X_3 = X_1 \cdot X_2$.

- Bestimmen Sie die Verteilung von $\mathbf{Z} = (X_1, X_3)$.
- Untersuchen Sie, ob X_1 und X_3 unabhängig sind.
- Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ mit $I = \{1, 2, 3\}$ unabhängig ist.

Aufgabe 42

Sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ eine 3-dimensionale Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ mit Werten in $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ und $P(X = x) = 1/4$ für alle $x \in A$.

- Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Verteilung von X_i .
- Untersuchen Sie, ob X_1 und X_2 unabhängig sind.
- Untersuchen Sie, ob die Familie $(X_i)_{i \in I}$ mit $I = \{1, 2, 3\}$ unabhängig ist.

Aufgabe 43

- Sei Z eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ mit Werten in \mathbb{Z} . Zeigen Sie für $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

- Seien X, Y i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ mit Werten in \mathbb{Z} . Zeigen Sie für $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(\min(X, Y) = k) = (P(X > k - 1))^2 - (P(X > k))^2.$$

Hinweis: Für reellwertige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$ nennt man

$$X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{bzw.} \quad X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

die 1-te bzw. n -te *Ranggröße* (engl.: *order statistics*).

Aufgabe 44

Seien X, Y i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit Werten in \mathbb{N}_0 und $X \sim G(p)$, $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie: $\min(X, Y) \sim G(p \cdot (2 - p))$.
Hinweise: Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p$. Beachten Sie auch Beispiel 3.36 f).

Aufgabe 45

- (a) Seien X eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ definierte Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, die auf der Menge $X(\Omega)$ Laplace-verteilt ist. Berechnen Sie $E(X)$ und $E(X^2)$.
- (b) Wie viele Richtige sind beim Lotto 6 aus 49 zu erwarten?

Hinweis: Beachten Sie zu (b) Aufgabe 23 (a).