

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Hinweis: Die Aufgaben werden in der Übung am Dienstag, dem 31.10.2006, mit Beginn 16.15 Uhr im Raum E 45 besprochen.

Aufgabe 1 (Verschiebungsformel von Steiner)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n, c \in \mathbb{R}$. In der statistischen Praxis werden zur Auswertung einer konkreten Stichprobe x_1, \dots, x_n vom Umfang $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, statistische Maßzahlen herangezogen, die bestimmte Eigenschaften der Stichprobe durch einen Zahlenwert kennzeichnen. Von besonderer Bedeutung sind dabei der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, die empirische Streuung $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ und die empirische Standardabweichung $+\sqrt{s^2}$. Zeigen Sie:

$$(a) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (c - \bar{x})^2;$$

$$(b) \quad \frac{n-1}{n} s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Aufgabe 2

Seien M und N Mengen, $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und $A \subset M$, $B \subset N$ Teilmengen.

- (a) Vergleichen Sie A und $f^{-1}(f(A))$.
- (b) Vergleichen Sie B und $f(f^{-1}(B))$.
- (c) Berechnen Sie $f^{-1}(f(A))$ für $M = N = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ und $f \equiv 1$.
- (d) Berechnen Sie $f(f^{-1}(B))$ für $M = N = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ und $f \equiv 1$.
- (e) Berechnen Sie $f^{-1}(B)$ für $M = N = \mathbb{R}$, $B = [1, 4]$ und $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Satz 1.8, Eigenschaften der Indikatorfunktion)

Seien Ω eine nicht leere Grundmenge und $A, B, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann bestehen die folgenden Beziehungen:

- (1) $\mathbf{1}_\emptyset \equiv 0$; $\mathbf{1}_\Omega \equiv 1$;
- (2) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \wedge \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;
- (3) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A \vee \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;
- (4) $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ für disjunkte Mengen A und B ;

$$(5) \mathbf{1}_{A \setminus B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^+ = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B;$$

$$(6) \mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A;$$

$$(7) \mathbf{1}_{A \Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|;$$

$$(8) \mathbf{1}_{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n};$$

$$(9) \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n};$$

$$(10) \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m} = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n};$$

$$(11) \mathbf{1}_{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m} = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}.$$

Beweisen Sie Aussage (7).

Hinweis: Wegen (8)-(11) definiert man

$$\inf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$\liminf A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m+n} \quad \text{und}$$

$$\limsup A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m+n}.$$

Aufgabe 4

Seien Ω eine nicht leere Grundmenge und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Ω .

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) $\underline{\lim} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ f\u00fcr fast alle } n \in \mathbb{N}\};$
- (b) $\overline{\lim} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ f\u00fcr unendlich viele } n \in \mathbb{N}\};$
- (c) $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n;$
- (d) $\underline{\lim} A_n = (\overline{\lim} A_n^c)^c.$

Aufgabe 5

Seien Ω eine nicht leere Grundmenge, $A, A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ und $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen A (in Zeichen: $A_n \rightarrow A$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$), wenn $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$ gilt. Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Ist die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ antiton, d. h. $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (in Zeichen: $A_n \downarrow$), so konvergiert sie gegen B (in Zeichen: $A_n \downarrow B$).
- (b) Ist die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isoton, d. h. $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (in Zeichen: $A_n \uparrow$), so konvergiert sie gegen C (in Zeichen: $A_n \uparrow C$).