

Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 7

Abgabe: Mo, 2. Dezember 2013, bis 16⁰⁰ Uhr,

Sachs/Groß

Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Aufgabe 10:

(8 Punkte)

Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung $-\Delta u(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ mit Dirichlet-Randbedingung $u(x, y) = \phi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma = \partial\Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein geeignetes beschränktes Gebiet ist und $f \in C(\Omega)$, $\phi \in C(\Gamma)$.

Bei der Diskretisierung der obigen Differentialgleichung über nicht-quadratischen Gebieten bedient man sich beispielsweise der folgenden (*Shortley-Weller-Formel*) (vergleiche Vorlesung):

$$\begin{aligned} \Delta_h u = & 2 \left(\frac{1}{h_y^- + h_y^+} \left(\frac{1}{h_y^-} u(x, y - h_y^-) + \frac{1}{h_y^+} u(x, y + h_y^+) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h_x^- + h_x^+} \left(\frac{1}{h_x^-} u(x - h_x^-, y) + \frac{1}{h_x^+} u(x + h_x^+, y) \right) - \left(\frac{1}{h_x^- h_x^+} + \frac{1}{h_y^- h_y^+} \right) u(x, y) \right) \end{aligned}$$

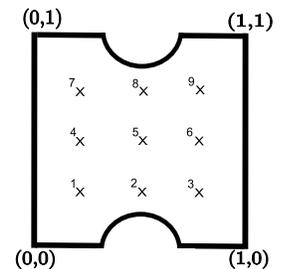
wobei $h_x^-, h_x^+, h_y^-, h_y^+$ die vom Punkt (x, y) ausgehenden Schrittweiten nach links, rechts, unten und oben sind.

Leiten Sie mittels dieser (*Shortley-Weller-Formel*) die Matrix L_h und das lineare Gleichungssystem her, das aus der Diskretisierung der Potentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 0 \\ \phi(x, y) &= \sin(\pi x) \end{aligned}$$

über dem im folgenden beschriebenen Gebiet Ω resultiert. Was ist der Nachteil der Shortley-Weller-Methode?

Das Gebiet sowie dessen Diskretisierung sind durch das Schaubild rechter Hand gegeben. Für u_i , $i \notin \{2, 8\}$ gilt $h_x^- = h_x^+ = h_y^- = h_y^+ = h := \frac{1}{4}$. Für u_2 ist wie im Schaubild ersichtlich $h_x^- = h_x^+ = h_y^+ = h$ und $h_y^- = \frac{1}{2}h$ zu wählen und für u_8 ist $h_x^- = h_x^+ = h_y^- = h$ und $h_y^+ = \frac{1}{2}h$ zu wählen.



Programmieraufgabe 6:

(6 Zusatz Punkte)

Lösen Sie die in Aufgabe 10 gegebene partielle Differentialgleichung mit Hilfe der **MATLAB-PDE-Toolbox** (siehe *pde-toolbox.pdf*). Drucken Sie einen Screenshot des von Ihnen erzeugten Gebietes und den von der Toolbox erzeugten Plot für zwei von Ihnen gewählte Gitterweiten aus.

Hinweis: Die PDE-Toolbox ist nicht in der Student Version oder Student Edition von Matlab enthalten. Sie müssen die Berechnungen deshalb gegebenenfalls in den CIP-Räumen des E-Gebäudes durchführen.

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

`NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt` oder `.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.

Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!