

Numerik der Differentialgleichungen (WS 2013/14)

Übungsblatt 11

Abgabe: Mo, 13. Januar 2014, bis 16⁰⁰ Uhr,

Sachs/Groß

Kasten mit Aufschrift *Numerik der Dgl.* im 1. Stock des E-Gebäudes

Programmieraufgabe 8:

(8 Punkte)

Die Berechnung von Optionspreisen kann auch über die stochastische Black-Scholes Differentialgleichung erfolgen. Bei einer europäischen Call-Option sucht man zu gegebenem Strike-Preis B und gegebener Maturity T den Preis der Kaufoption $C = \max\{S_T - B, 0\}$ als Auszahlungsfunktion angewendet auf den Kurs des Underlyings $0 < S \in \mathbb{R}$, der durch Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung ermittelt wird:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{mit } t \in [0, T]$$
$$S_0 > 0 \quad \text{gegeben durch heutigen Aktienkurs.}$$

Hierbei bezeichnet $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie und r den Zinssatz einer risikolosen Anlage. Zur numerischen Lösung einer SDE werden oftmals folgende zwei Verfahren angewendet.

Euler-Maruyama Verfahren:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta t_n + b(Y_n)\Delta W_n$$

Milstein Verfahren:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta t_n + b(Y_n)\Delta W_n + \frac{b(Y_n)b'(Y_n)}{2} \left((\Delta W_n)^2 - \Delta t_n \right)$$

wobei $b'(Y) = \frac{\partial}{\partial Y} b(Y)$.

- i) Programmieren Sie das Euler-Maruyama und das Milstein-Verfahren zur numerischen Lösung der Black-Scholes-SDE in Matlab. Setzen Sie hierbei $S_0 = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.02$ und Strike $B = 90$. Als Diskretisierungsparameter wählen Sie als Zeitdiskretisierung $N = 100$ variieren die Anzahl der Monte-Carlo Simulationen $M = 2^{m^2}$ mit $m = 1, \dots, 4$. Berechnen Sie den exakten Preis der Kaufoption (Callpreis) mittels der geschlossenen Lösungsformel (`blsprice`) und geben Sie den Monte-Carlo Fehler zwischen numerischer und exakter Lösung in einer Tabelle aus. Plotten Sie zusätzlich für $m = 2$ die Pfade beider numerischer Lösungen.
- ii) Interpretieren Sie die Resultate bei Variation der Volatilität ($\sigma = 0.01, 0.5, 1$ und 1.5). Was ist zu beobachten?

Programmierhinweise

Laden Sie den Matlab-Quellcode versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch.

NachnameMatrikelnummerAufgabennummer.txt oder .m

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Name
- Matrikelnummer
- Aufgabennummer
- Datum

Drucken Sie ebenfalls den die Ergebnisse (Tabellen und Graphen) der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.

Kommentieren Sie immer die Ergebnisse!