Numerik (Sommersemester 2014)

Übungsblatt 9 — Abgabe: Mo, 7. Juli 2014, bis 14^{00} Uhr, *Kasten E6*

Groß/Sachs — im Foyer des E-Gebäudes

Hausaufgabe 23: (5 Punkte)

Sei $f(x) = x\sin(\frac{\pi}{x})\,,\ x \in (0\,,1]$ und P_n die Lagrange-Interpolierende an den Stützstellen

$$x_i = \frac{1}{i+1}\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Zeigen Sie

$$\|P_n - f\|_\infty = \max_{x\in(0\,,1]} |P_n(x) - f(x)| \not\to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Hausaufgabe 24: (5+5 Punkte)

Berechnen Sie

a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}dx, \quad I = \pi \approx 3,14159 \approx \frac{22}{7}$$

b)

$$\int_{0}^{\pi} \sin(t)dt, \quad I = 2$$

jeweils mit der (einfachen)

i) Mittelspunktregel,

ii) Trapezregel,

iii) Simpsonregel.

iv) und begründen Sie (kurz), welche Regel den exakten Wert des Integrals I besser approximiert.

Hausaufgabe 25: (3+2 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und P_n das zu den äquidistanten Stützstellen $a_i = a + ih$, $i = 0, ..., n$, $h = (b - a)/n$, gehörige Lagrange-Interpolationspolynom. Zeigen Sie, dass für die Quadraturformeln

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a_i), \quad \alpha_i = \int_0^n \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{s-k}{i-k} ds$$

die folgenden Aussagen gelten:

i) $\alpha_{n-i} = \alpha_i, \ \ i = 0, ..., n$

ii) $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = n$

Tipp: Benutzen Sie für den Aufgabenteil i) die Substitutionsregel.

Übungsaufgabe 10:

Bestimmen Sie (von Hand!) mit der Lagrange-Interpolationsformel ein Interpolationspolynom 4. Grades durch die Punkte:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-5	-1	1	3	7

Programmieraufgabe 6: (8 Zusatz- Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm (oder Excel-Programm), welches die **Runge-Funktion**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

mit Hilfe der Lagrange Interpolationsformel im Intervall $[-5, 5]$ approximiert.
TIPP: Benutzen sie in Matlab: `f=inline('1./(1+x.^2)','x')` und dann können Sie die Funktion einfach mittels `f( );` aufrufen, wobei in der Funktion sowohl eine Zahl, ein Vektor als auch eine Matrix stehen können.

Dazu sei $n \in \mathbb{N}$,

α) $G^n = \{x_k = -5 + hk; k = 0, 1, \ldots, n, h = \frac{10}{n}\}$ ein äquidistantes Gitter auf $[-5, 5]$

β) $T^n = \{t_k = -5\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right); k = 0, 1, \ldots, n\}$ das Gitter der Tschebyscheff–Knoten auf $[-5, 5]$

Geben Sie für $n = 8$ die Gitterpunkte $x_k \in G^n$ und $t_k \in T^n$ (auf sechs Stellen genau) aus.

Seien $p_1^n, p_2^n \in P_n$ die Lagrange'schen Interpolationspolynome definiert durch

i) $p_1^n(x_k) = f(x_k)\ \forall x_k \in G^n$

ii) $p_2^n(t_k) = f(t_k)\ \forall t_k \in T^n$

Erstellen Sie Grafiken, in der die Runge-Funktion f sowie die Polynome p_1^n, p_2^n für $n = 8, 12, 16$ auf dem Gitter G^{200} jeweils in ein gemeinsames Koordinatensystem verglichen wird. Das heißt, dass das x aus der Lagrangeformel dem Gitter G^{200} entspricht. Dies gilt sowohl für die äquidistante Formel als auch für die Tschebyscheff–Knoten. Die Datenpunkte x_i sind die jeweiligen Gitterpunkte G^n bzw. T^n und deren Funktionswerte $f(x_i) = f_i$.

Geben Sie für das Gitter G^{200} ferner folgende Größen aus

$n \quad ||f - p_1^n||_\infty \quad ||f - p_2^n||_\infty$

Dabei ist $||x||_\infty = \max_n |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Was können Sie beobachten? Kommentieren Sie die Ergebnisse ausführlich! Beschreiben Sie dabei das sogenannte **Runges Phänomen**.

Laden Sie den Quellcode (als `m-file` oder Excel-File abgespeichert) versehen mit Namen und Matrikelnummer im StudIP hoch! Die abzugebende Datei muss folgenden Namen haben:

`NachnamenMatrikelnummernAufgabennummer.m`

In der den ersten Zeilen des `m-file` stehen mit `%` auskommentiert:

- Namen, Matrikelnummern, Studienfächer

Drucken Sie die Ergebnisse der Programmieraufgabe aus und geben Sie diese zusammen mit dem Übungszettel ab.